Anatomy of a Number
March 13–17, 2006

Power-free values, points on curves, large deviations and modularity

Harald Helfgott
helfgott@dms.umontreal.ca
Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. Centre-ville
Montréal, Québec H3C 3J7
Canada

Abstract

Let $f \in \mathbb{Z}[x]$ be a polynomial of degree $d \geq 3$ without roots of multiplicity d or $(d-1)$. Assume that $f(x) \not\equiv 0 \bmod p^{r-1}$ has a solution in $(\mathbb{Z}/p^{r-1})^*$ for every p. Erdös conjectured that, if f satisfies the necessary local conditions, then $f(p)$ is free of $(d-1)$th powers for infinitely many primes p. I have proven this conjecture for all f with sufficiently high entropy. The proof serves to demonstrate two innovations: a strong repulsion principle for integer points on curves of positive genus, and a number-theoretical analogue of Sanov's theorem from the theory of large deviations.

Soit $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme de degré $d \geq 3$ sans racines de multiplicité d ou $(d-1)$. Supposons que $f(x) \not\equiv 0 \bmod p^{r-1}$ admette une solution dans $(\mathbb{Z}/p^{r-1})^*$ pour tout p. Erdös a conjecturé que si f satisfait les conditions locales necessaires alors $f(p)$ est sans facteurs puissances $(d-1)^{\text{èmes}}$ pour une infinité de nombres premiers p. On prouve cela pour toutes les fonctions f dont l'entropie est assez grande. On utilise dans la preuve un principe de répulsion pour les points entiers sur les courbes de genre positif et un analogue arithmétique du théorème de Sanov issu de la théorie des grandes déviations.