

*Modèles statistiques en deux dimensions,
théorie des champs conformes,
et équation de Schramm-Loewner*

MAT 6840, hiver 2008

Professeur

Yvan SAINT-AUBIN
bureau 5237, tél : 343-6373,
saint@dms.umontreal.ca

Objectifs

Le but de ce cours est d'offrir aux étudiants un premier contact à certains des thèmes de l'année thématique 2008-2009 du Centre de recherches mathématiques. Seront touchés principalement les domaines : modèles statistiques sur réseau, théorie des champs conformes (CFT) et l'équation stochastique de Schramm-Loewner (SLE).

Les objectifs sont les suivants.

1. L'étudiant pourra comprendre les arguments et faire des calculs simples dans les trois domaines (modèles sur réseau, CFT et SLE).
 2. Il reconnaîtra comment les trois théories sont liées.
 3. Il connaîtra certains des problèmes ouverts.
-

Programme

Le programme contient trois sujets distincts qui ont été développés à divers moments du XXe siècle. Les trois théories partagent un même but : donner une description rigoureuse des phénomènes critiques en deux dimensions. Le cours essaiera de montrer comment ces théories sont reliées et pourquoi chacune demeure incomplète.

Chapitre 1 : les modèles statistiques sur réseau en deux dimensions (réseau)

La première théorie qui sera couverte dans ce cours sera celle développée dans les années quarante du XXe siècle, principalement par Onsager et son étudiante Kaufman. Le but sera d'obtenir le spectre de la matrice de transfert. Ce chapitre sera couvert rigoureusement mathématiquement.

1. description de certains modèles : percolation, Ising, Potts, XY ;
2. matrice de transfert, Ising 1d, Ising 2d, spectre d'Onsager ;
3. existence d'une transition de phase ;
4. énumération des états dans la limite quand la maille tend vers zéro.

Source principale :

* C.J. Thompson, *Mathematical Statistical Mechanics*, Macmillan, NY (1972).

Autres sources :

B.M. McCoy, T.T. Wu, *The two-dimensional Ising model*, Harvard Univ. Pr., Cambridge (1973).
R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic, London (1982).

Chapitre 2 : la théorie conforme des champs (CFT)

La seconde théorie a été créée par un papier crucial de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov (1984). Cette théorie repose sur des arguments fins d'algèbre (théorie de la représentation des algèbres de Lie) qui sont rigoureux et sur des arguments physiques de théorie des champs quantiques. Il y a deux buts pour ce chapitre : (1) montrer comment la théorie algébrique redonne le spectre de la matrice de transfert du modèle d'Ising (obtenue au chapitre précédent) et (2) obtenir la formule de Cardy pour la probabilité de traversée dans un rectangle en percolation.

1. groupe conforme, transformations conformes en 2d, algèbre des champs de vecteurs ;
2. algèbre de Virasoro, extension centrale et mécanique quantique : Vir ;
3. module de plus haut poids, réductibilité, déterminant de Kac ;
4. spectre de la matrice de transfert d'Ising ;
5. identité de Ward et équations différentielles provenant des vecteurs singuliers ;
6. formule de Cardy pour la percolation.

Source principale :

★ Ph. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal field theory*, Springer, NY (1997).

Autres sources :

J. Cardy, *Critical percolation in finite geometries*, J. Phys. A 25, L201 (1992). (hep-th/9111026)

Y. Saint-Aubin, *Théorie des champs conformes en deux dimensions*, notes de cours, Université de Montréal (1987).

Y. Saint-Aubin, *The Virasoro algebra and its representation theory*, notes de cours, Université de Montréal (1990).

Chapitre 3 : Équation de Schramm-Loewner (SLE)

Cette dernière théorie est basée sur les travaux de Schramm (2000), puis de Lawler, Schramm et Werner (2000 à aujourd'hui). Elle repose sur l'intégration d'équations différentielles stochastiques qui est un chapitre de la théorie des probabilités modernes. Pour la comprendre, il faudra nous initier à cette théorie. Le but pour cette partie est de comprendre les idées de base, de démontrer la formule de Cardy et quelques autres propriétés.

Pour l'initiation aux équations différentielles stochastiques :

1. un survol des idées de base en probabilité ;
2. le mouvement brownien, le bruit blanc ;
3. l'intégrale stochastique et la formule d'Itô ;
4. équations différentielles stochastiques.

Et pour la partie SLE :

1. l'équation de Loewner classique ;
2. l'énoncé du théorème de Schramm ;
3. chemins passant à droite d'un point dans le plan ;
4. la formule de Cardy ;
5. propriétés des courbes SLE ;
6. autres observables physiques.

Sources principales :

Pour l'initiation aux équations diff. stochastiques :

L.C. Evans, *An introduction to stochastic differential equations*, v. 1.2, notes de cours, Berkeley (19??) (Disponible à partir de : math.berkeley.edu/~evans/)

Pour SLE :

J. Cardy, *SLE for theoretical physicists*, *Ann. Phys.* **318**, 81–118 (2005). (cond-mat/0503313 v2)

W. Kager, B. Nienhuis, *A guide to stochastic Löwner evolution and its applications*, *J. Stat. Phys.* **115**, 1149–1229 (2004). (math-ph/0312056 v3)

M. Bauer, D. Bernard, 2D growth processes : SLE and Loewner chains, *Phys. Rep.* **432**, 115–221 (2006). (math-ph/0602049)

et tous les articles de G.F. Lawler, O. Schramm et W. Werner !

Autres sources (pour l'initiation aux éqs. diff. stoch.) :

B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, 5e éd. ou suivante, Springer, Berlin (1998).

H.P. McKean, *Stochastic integrals*, Academic, NY (1969).

Horaire et calendrier

LU 9h30 – 11h00, salle 4186, Pav. André-Aisenstadt

JE 9h30 – 11h00, salle 4186, Pav. André-Aisenstadt

Les jeudis seront consacrés au Chapitre 1 (environ 5 périodes) puis au Chapitre 2 (environ 7 périodes), les lundis au Chapitre 3.

Evaluation

Les étudiants inscrits devront choisir entre deux modalités d'évaluation.

1. deux examens (fin février et mi-avril) comptant chacun pour la moitié de la note ;
2. au moins une présentation en classe (environ 40%) et la solution au tableau d'exercices proposés en classe (environ 60%).

Les inscrits seront invités à choisir entre ces deux possibilités durant la première semaine.

A titre d'exemples, voici quelques sujets/articles qui pourraient être couverts lors des exposés :

C. Thompson, section 5-5 *The Onsager solution of the two-dimensional model* du livre cité au Chapitre 1 ci-dessus.

D. B. Abraham, A. Martin-Löf, *The transfer matrix for a pure phase in the two-dimensional Ising model*, *Comm. Math. Phys.* **32**, 245–268 (1973).

G. Watts, *A crossing probability for percolation in two dimensions*, *J. Phys.* **A29**, L363 (1996). (cond-mat/9603167)
