

Periodos Críticos y Clasificación de
Centros de un Sistema Cúbico
*Périodes critiques et Classification des
centres d'un système cubique*

I. Hernandez-Loreto* B. Toni*†

CRM-2714

February 2001

*Facultad de Ciencias, Universidad Autonoma del Estado de Morelos, Cuernavaca 62210, Mexico, iloreto@servm.fc.uaem.mx y toni@servm.fc.uaem.mx

†Center of Research in Mathematics, University of Montreal, Succ. Centre-ville, Montreal, Qc H3C 3J7 Canada, toni@crm.umontreal.ca

Resumen

En este artículo determinamos y analizamos la función periodo de un sistema cúbico en el plano usando un algoritmo con Maple. Proporcionamos una clasificación de los centros en centros de orden finito e infinito ó isocrono, así como el máximo número de periodos críticos que se pueden bifurcar del centro.

Palabras y Frases claves: Periodos críticos, Isocrono, Bifurcación.

Abstract

In this paper, we determine and analyze the period function of a planar cubic system, via an algorithm on Maple. We then classify the centers into centers of finite order and infinite order or isochronous centers. Moreover we give the maximum number of critical periods bifurcating from the centers.

1991 Mathematics Subject Classification: 34C15, 34C25, 58F14, 58F21, 58F30

Résumé

Dans ce travail nous déterminons et analysons la fonction période d'un système cubique dans le plan via un algorithme sur Maple. Ensuite nous classifions les centres en centres d'ordre fini et d'ordre infini ou centres isochrones. En outre nous donnons le nombre maximum de périodes critiques qui bifurquent de ces centres.

1 Introducción.

Consideremos una familia de sistemas diferenciales en el plano $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^n}$ parametrizada por λ de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -y(t) + P_\lambda(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + Q_\lambda(x(t), y(t)),\end{aligned}\tag{1}$$

donde $P_\lambda(x, y)$ y $Q_\lambda(x, y)$ son polinomios en las variables x y y , con un *centro* no degenerado en el origen, es decir, un punto singular que está rodeado por una familia continua de soluciones periódicas $\{C_k\}$.

Para estudiar el comportamiento del periodo de las órbitas periódicas cerca del origen, se define la función periodo $T(h, \lambda)$ asociada al centro en el parámetro λ , la cual asigna a cada elemento h del semieje transversal Σ , llamado sección de Poincaré, el periodo mínimo de la trayectoria γ_h que pasa por h .

En los años recientes se han obtenido un gran número de resultados asociados a la función periodo, especialmente acerca de la monotonicidad de la función y el número de puntos críticos de ella (ver [CJ]). De hecho las propiedades de monotonicidad de la función periodo, además de su interés intrínseco, son importantes por la cuestión de existencia y unicidad de problemas autónomos con valor en la frontera, en el estudio de bifurcación subarmónica de oscilaciones periódicas y en el análisis de problemas de linearización.

El estudio global del número de puntos críticos de la función periodo es un problema muy difícil que en general no está resuelto. En este artículo estamos interesados en la cuestión local de cual es el número máximo de puntos críticos (*periodos críticos*) que se pueden bifurcar de cierto sistema con el parámetro λ en una vecindad de λ_* para la cual el origen es un centro del sistema; esta cuestión es atacada calculando la serie de Taylor de la función periodo en una vecindad del centro y determinando el orden de su primer término no constante, este cálculo es puramente algorítmico; cuando se trata de una familia polinomial de sistemas diferenciales los coeficientes de la función periodo son polinomios en los coeficientes del sistema, es decir, en las componentes de λ ; el igualar a cero los coeficientes de la función periodo nos lleva a cuestiones de cómo determinar la base de un ideal de polinomios, es decir, el menor conjunto que genera al ideal; este último análisis nos permite determinar las condiciones necesarias para tener un centro *isocrono* (aquel para el cual la función periodo es constante) en la familia.

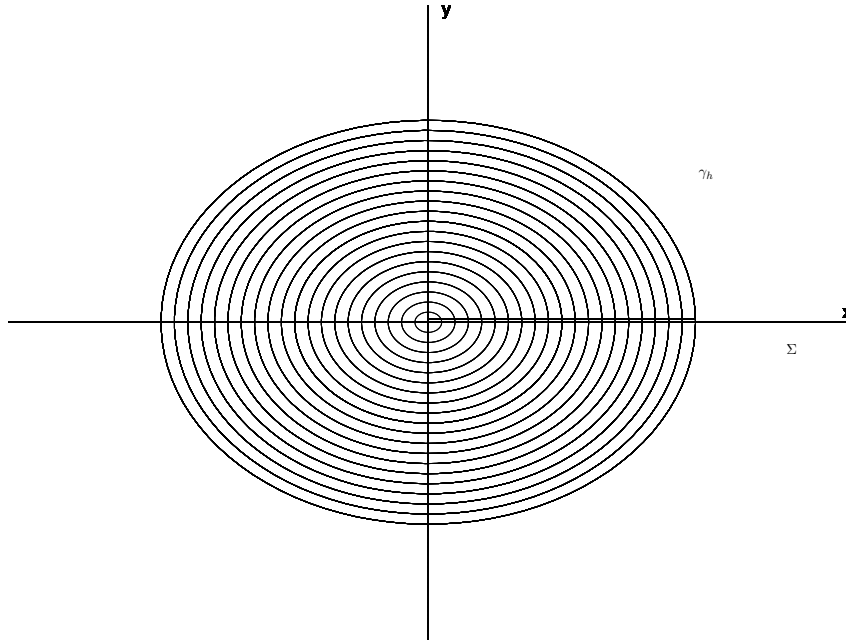
Cabe mencionar que hasta la fecha hay muy pocos sistemas con centros clasificados: los sistemas cuadráticos fueron clasificados por Loud [L] y Chicone y Jacobs en [CJ], los sistemas cúbicos con no linealidad homogénea por Pleshkan en [P] y por Rousseau y Toni en [RT1], y los sistemas cúbicos hamiltonianos por Cima, Mañosas y Villadelprat en [CMV], el sistema cúbico de Kapteyn en [T]. El estudio de este sistema (ver sección 3), así como los previamente mencionados está motivado por el hecho de tratar de obtener leyes generales del mecanismo de isocronicidad y acerca del número máximo de periodos críticos locales para una familia polinomial en términos del grado del sistema, y luego poder así atacar el problema global.

En la sección 2 (preliminares) se dan las herramientas necesarias para el análisis del problema tales como algunas definiciones y teoremas; y en la sección 3 (el sistema cúbico) se presenta de una manera detallada el análisis del sistema diferencial en el que se trabajó.

2 Preliminares.

Definición 2.1 Dado un sistema diferencial parametrizado $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^n}$, donde el parámetro λ es tal que el sistema diferencial tiene un centro no degenerado en el origen, a $T(h, \lambda) = \int_{\gamma_h} dt$ se le llama *función periodo*, donde $h \in \Sigma$ (Σ es el semieje transversal llamado sección de Poincaré) y γ_h es la trayectoria que pasa por h . Es decir la función periodo correspondiente al parámetro λ asigna a h el periodo mínimo de la trayectoria γ_h que pasa por h .

Gráfica 1. Función Periodo



La función periodo $T(h, \lambda)$ tiene ciertas propiedades interesantes, las cuales se dan en el siguiente lema [CJ].

Lema 2.2

1) Definiendo $T(0, \lambda) = 2\pi$ para $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Si $\lambda_* \in \mathbb{R}^n$, entonces existe una vecindad abierta W de λ_* y un intervalo abierto J que contiene a $h = 0$, tal que la función periodo $T(h, \lambda)$ es analítica en $J \times W$.

2) Dada cualquier $\lambda_* \in \mathbb{R}^n$ la función periodo $T(h, \lambda)$ está representada por su serie de Taylor

$$T(h, \lambda) = 2\pi + \sum_{1 \leq k \leq \infty} p_k(\lambda)h^k,$$

para $|h|$ y $|\lambda - \lambda_*|$ suficientemente pequeños. Más aún, $p_1 \equiv 0$ y para cada $k \geq 2$, $p_k \in \mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]_{\lambda_*}$, el anillo de series de potencias convergentes en λ_* .

3) Para $k \geq 1$ los coeficientes p_{2k+1} pertenecen al ideal (p_2, \dots, p_{2k}) sobre el anillo $\mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]_{\lambda_*}$ para cada $\lambda_* \in \mathbb{R}^n$. En particular, para $\lambda \in \mathbb{R}^n$, el primer entero $k \geq 1$ tal que $p_k \neq 0$ es par.

Definición 2.3

1. Si $p_2 = \dots = p_{2k} = 0$ y $p_{2k+2} \neq 0$ entonces el origen es un *centro lineal débil de orden finito k*.
2. Si $p_{2k} = 0 \forall k \geq 1$ entonces el origen es un *centro de orden infinito*, llamado *centro isocrono*.

Observación 2.4

Como $\mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es un anillo noetheriano entonces por el teorema de base de Hilbert existe una $m \in \mathbb{N}$ tal que el ideal infinito de los coeficientes de la función periodo está finitamente generado, es decir, $\langle p_2, p_4, \dots, p_{2k}, \dots \rangle = \langle p_2, p_4, \dots, p_{2m} \rangle$ para m algún entero positivo. Esto nos lleva a que $p_2 = p_4 = \dots = p_{2m} = 0$ son condiciones suficientes para probar la isocronicidad del sistema, así la determinación de m es un paso muy importante en este análisis. Los coeficientes p_2, p_4, \dots, p_{2m} pueden ser calculados por un algoritmo usando MapleV.

Definición 2.5 k *periodos críticos locales* se bifurcan de un centro débil correspondiente al parámetro λ_* si:

1. Para toda $\alpha > 0$ suficientemente pequeña, existe una vecindad W de λ_* tal que para cualquier $\lambda \in W$, $T(h, \lambda)$ tiene a lo más k puntos críticos en $U = (0, \alpha)$.
2. Más aún, cualquier vecindad de λ_* contiene un punto λ_{**} tal que $T(h, \lambda_{**})$ tiene exactamente k puntos críticos en $U = (0, \alpha)$.

A continuación se presentan una definición y dos teoremas los cuales son las herramientas básicas para el análisis del sistema diferencial.

Definición 2.6 Para $\lambda_* \in V(p_2, \dots, p_{2k}) = \{\lambda | p_{2i}(\lambda) = 0, i = 1, \dots, k\}$ y $p_{2k+2}(\lambda_*) \neq 0$, los coeficientes de la función periodo p_2, \dots, p_{2k} se dicen *independientes* con respecto a p_{2k+2} en λ_* cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. Cualquier vecindad de λ_* contiene un punto λ tal que $p_{2k}(\lambda)p_{2k+2}(\lambda) < 0$.
2. $V(p_2, \dots, p_{2j}), j = 1, \dots, (k-1)$, son tales que si $\lambda \in V(p_2, \dots, p_{2j})$ y $p_{2j+2}(\lambda) \neq 0$, entonces cualquier vecindad de λ contiene un punto $\lambda_{**} \in V(p_2, \dots, p_{2j-2})$ tal que $p_{2j}(\lambda_{**})p_{2j+2}(\lambda_{**}) < 0$.

Para el caso de un centro de orden finito se tiene el siguiente teorema:

Teorema de bifurcación de orden finito [C.J]. Sea $X(x, y, \lambda)$ un sistema diferencial de la forma dada en (1), con un centro de orden k en el origen correspondiente al parámetro λ_* .

Si los coeficientes p_2, p_4, \dots, p_{2k} de la función periodo son independientes con respecto a p_{2k+2} en λ_* entonces exactamente k periodos críticos se bifurcan del centro débil correspondiente al parámetro λ_* para cualquier $j \leq k$.

En el caso de un centro isocrono tenemos el siguiente teorema:

Teorema de bifurcación isocrónica [C.J]. Si el sistema diferencial $X(x, y, \lambda)$ tiene un centro isocrono en el origen para el parámetro λ_* y si para cada entero $i \geq 1$ los coeficientes de la función periodo p_i están en el ideal $\langle p_2, \dots, p_{2k}, p_{2k+2} \rangle$ sobre el anillo $R[\lambda_1, \dots, \lambda_n]_{\lambda_*}$ de series de potencias convergentes en λ_* entonces a lo más k periodos críticos locales se bifurcan del centro isocrono en λ_* .

Más aún si p_2, \dots, p_{2k} son independientes con respecto a p_{2k+2} en λ_* , entonces exactamente j periodos críticos locales se bifurcan del centro correspondiente a λ_* para $j \leq k$.

A continuación analizamos un sistema cúbico particular con condiciones de centro dadas en [CRZ]. Clasificamos esos centros en términos de orden finito e infinito ó isocrono, estimando el número de periodos críticos que se bifurcan.

3 El sistema cúbico.

3.1 Condiciones de centro.

El sistema diferencial es el siguiente:

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Dz^3 + Ez^2\bar{z} + Fz\bar{z}^2, \quad (2)$$

con $z, A, D, E, F \in \mathbb{C}$ y

$$z = x + iy, A = a_1 + ia_2, D = d_1 + id_2, E = e_1 + ie_2, F = f_1 + if_2.$$

Este sistema tiene en coordenadas cartesianas la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2 + B_{30}x^3 + B_{21}x^2y + B_{12}xy^2 + B_{03}y^3 \\ \dot{y} &= x + C_{20}x^2 + C_{11}xy + C_{02}y^2 + D_{30}x^3 + D_{21}x^2y + D_{12}xy^2 + D_{03}y^3\end{aligned}\quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned}A_{20} &= a_1, A_{11} = -2a_2, A_{02} = -a_1; \\ B_{30} &= d_1 + e_1 + f_1, B_{21} = -3d_2 - e_2 + f_2, B_{12} = -3d_1 + e_1 + f_1, \\ B_{03} &= d_2 - e_2 + f_2; \\ C_{20} &= a_2, C_{11} = 2a_1, C_{02} = -a_2; \\ D_{30} &= d_2 + e_2 + f_2, D_{21} = 3d_1 + e_1 - f_1, D_{12} = -3d_2 + e_2 + f_2, \\ D_{03} &= -d_1 + e_1 - f_1.\end{aligned}\quad (4)$$

y $\lambda = (a_1, a_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2) \in \mathbb{R}^8$ el parámetro de bifurcación.

Y en coordenadas polares tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r^2[a_1 \cos^3(\theta) - a_2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + a_1 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - a_2 \sin^3(\theta)] \\ &\quad + r^3[(d_1 + e_1 + f_1) \cos^4(\theta) + 2(-d_2 + f_2) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 2e_1 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\ &\quad + 2(-d_2 + f_2) \cos(\theta) \sin^3(\theta) + (-d_1 + e_1 - f_1) \sin^4(\theta)] \\ \dot{\theta} &= 1 + r[a_2 \cos^3(\theta) + a_1 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + a_2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + a_1 \sin^3(\theta)] \\ &\quad + r^2[(d_2 + e_2 + f_2) \cos^4(\theta) + 2(d_1 - f_1) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 2e_2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\ &\quad + 2(d_1 - f_1) \cos(\theta) \sin^3(\theta) + (-d_2 + e_2 - f_2) \sin^4(\theta)]\end{aligned}\quad (5)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

Los conjuntos de parámetros para los cuales el sistema tiene un centro en el origen están dados en el siguiente teorema.

Teorema 3.1 [CRZ]. El sistema (3) tiene un centro en el origen si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones:

1. $E = F = 0$;
2. $Re(E) = 0$, $D = \bar{F}$;
3. $Re(E) = Im(DF) = Re(A^2\bar{D}) = Re(A^2F) = 0$.

Es decir, el sistema (4) tiene un centro en el origen si y sólo si $\lambda \in G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, donde

$$\begin{aligned}G_1 &= \{\lambda = (a_1, a_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2) \in \mathbb{R}^8 \mid e_1 = e_2 = f_1 = f_2 = 0\}; \\ G_2 &= \{\lambda = (a_1, a_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2) \in \mathbb{R}^8 \mid e_1 = 0, d_1 = f_1, d_2 = -f_2\}; \\ G_3 &= \{\lambda = (a_1, a_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2) \in \mathbb{R}^8 \\ &\quad \mid e_1 = d_1f_2 + d_2f_1 = d_1(a_1^2 - a_2^2) + 2a_1a_2d_2 = f_1(a_1^2 - a_2^2) - 2a_1a_2f_2 = 0\}.\end{aligned}$$

3.2 Expresión de la función periodo.

Se analizó la función periodo. Por definición la función periodo es

$$T(h, \lambda) = \int_0^{2\pi} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}}. \quad (6)$$

Para determinar esta función se cambia el sistema a coordenadas polares y se elimina al tiempo quedando:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 H_1(\theta, \lambda_*) + r^3 H_2(\theta, \lambda_*)}{1 + r H_3(\theta, \lambda_*) + r^2 H_4(\theta, \lambda_*)}, \quad (7)$$

con $\lambda_* \in G$ y

$$\begin{aligned} H_1(\theta, \lambda_*) &= a_1 \cos(\theta) - a_2 \sin(\theta); \\ H_2(\theta, \lambda_*) &= 2(d_1 + f_1) \cos^2(\theta) + 2(f_2 - d_2) \cos(\theta) \sin(\theta) + e_1 - d_1 - f_1; \\ H_3(\theta, \lambda_*) &= a_2 \cos(\theta) + a_1 \sin(\theta); \\ H_4(\theta, \lambda_*) &= 2(d_2 + f_2) \cos^2(\theta) + 2(d_1 - f_1) \cos(\theta) \sin(\theta) + e_2 - d_2 - f_2. \end{aligned}$$

Luego se resuelve esta ecuación con condición inicial $r(0, \lambda) = h > 0$ en series de potencias alrededor de h pudiendo así representar la solución como:

$$r(\theta, h, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \lambda) h^k. \quad (8)$$

Sustituyendo (7) en (6) se obtiene la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= 0, \\ \dot{u}_2 &= H_1 u_1^2, \\ \dot{u}_k &= -H_3 \sum_{j \geq 1}^{k-1} u_j \dot{u}_{k-j} - H_4 \sum_{j \geq 2}^{k-1} \left(\sum_{i \geq 1}^{j-1} u_i u_{j-i} \right) \dot{u}_{k-j} + H_1 \sum_{j \geq 1}^{k-1} u_j u_{k-j} \\ &\quad + H_2 \sum_{j \geq 2}^{k-1} \left(\sum_{i \geq 1}^{j-1} u_i u_{j-i} \right) u_{k-j}, \end{aligned} \quad (9)$$

para $k \geq 3$.

De esta relación se obtienen los coeficientes $u_k(\theta, \lambda)$. Así, de la condición inicial se deduce que $u_1(0, \lambda) = 1$ y $u_k(0, \lambda) = 0$ para $k \geq 2$.

Ahora la función periodo esta dada por:

$$T(h, \lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + r(\theta, h, \lambda) H_3(\theta, \lambda) + r^2(\theta, h, \lambda) H_4(\theta, \lambda)} d\theta. \quad (10)$$

Como

$$\frac{1}{1 + r(\theta, h, \lambda) H_3(\theta, \lambda) + r^2(\theta, h, \lambda) H_4(\theta, \lambda)}$$

es analítica para toda θ y $|h|$ suficientemente pequeños entonces puede ser expandido en serie de potencias de la forma

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(\theta, \lambda) h^k.$$

De aquí la función periodo se puede representar por

$$T(h, \lambda) = 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\lambda) h^k, \quad (11)$$

donde

$$p_k(\lambda) = \int_0^{2\pi} p_k^*(\theta, \lambda).$$

Y los terminos $p_k^*(\theta, \lambda)$ se calculan de la relación

$$(1 + H_3(\theta, \lambda) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \lambda) h^k + H_4(\theta, \lambda) (\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta, \lambda) h^k)^2) (1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(\theta, \lambda) h^k) = 1. \quad (12)$$

Los coeficientes periodo $p_k(\lambda)$ se calculan utilizando el siguiente algoritmo en Maple V.

Algoritmo para calcular los coeficientes de la función periodo.

Dar el valor de k.

k:= :

H[1]:=x->a[1]*cos(x)-a[2]*sin(x):

H[2]:=x->2*(d[1]+f[1])*(cos(x))^2+2*(-d[2]+f[2])*cos(x)*sin(x)-d[1]+e[1]-f[1]:

H[3]:=x->a[2]*cos(x)+a[1]*sin(x):

H[4]:=x->2*(d[2]+f[2])*(cos(x))^2+2*(d[1]-f[1])*cos(x)*sin(x)-d[2]+e[2]-f[2]:

up[1]:=x->0:

u[1]:=x->1:

pe[1]:=unapply(-H[3](x),x):

for j from 2 by 1 to k do

va[j]:=unapply(sum('u[i](x)*u[j-i](x)', 'i'=1..(j-i)),x):

v[j]:=unapply(simplify(va[j](x), trig),x):

Aa[j]:=unapply(sum('u[i](x)*up[j-i](x)', 'i'=1..(j-i)),x):

A[j]:=unapply(simplify(Aa[j](x), trig),x):

Ba[j]:=unapply(sum('v[i](x)*up[j-i](x)', 'i'=2..(j-i)),x):

B[j]:=unapply(simplify(Ba[j](x), trig),x):

Ca[j]:=unapply(sum('v[i](x)*u[j-i](x)', 'i'=2..(j-i)),x):

C[j]:=unapply(simplify(Ca[j](x), trig),x):

Dea[j]:=unapply(sum('u[i](x)*pe[j-i](x)', 'i'=1..(j-i)),x):

De[j]:=unapply(simplify(Dea[j](x), trig),x):

Ea[j]:=unapply(sum('v[i](x)*pe[j-i](x)', 'i'=2..(j-i)),x):

E[j]:=unapply(simplify(Ea[j](x), trig),x):

upa[j]:=unapply(-H[3](x)*A[j](x)-H[4](x)*B[j](x)+H[1](x)*v[j](x)+H[2](x)*C[j](x),x):

up[j]:=unapply(simplify(upa[j](x), trig),x):

ua[j]:=unapply(int(up[j](x),x),x): ua[j](0):

u[j]:=unapply((simplify(ua[j](x)-ua[j](0), trig),x):

```

pea[j]:=unapply(-H[3](x)*(u[j](x)+De[j](x))-H[4](x)*(v[j](x)+E[j](x)),x):
pe[j]:=unapply(simplify(pea[j](x),trig),x):
end do:
p[k]:=int(pe[k](x),x=0..2*Pi);
.....

```

Con la ayuda de estos coeficientes se llegó a lo siguiente.

3.3 Centro de tipo I.

Definición 3.2 El sistema (4) tiene un *centro de tipo I* en el origen si el sistema es no lineal y $\lambda \in G_1$.

Determinando los coeficientes periodo con $\lambda \in G_1$, obtenemos

Lema 3.3

Para $\lambda \in G_1$ $p_2(\lambda) = p_4(\lambda) = p_6(\lambda) = p_8(\lambda) = 0$.

Debido a este hecho se conjetura que el origen es un centro isocrono de (4) cuando $\lambda \in G_1$ y lo que se hizo fue demostrar que en realidad así es.

Teorema 3.4 Si el sistema (4) tiene un centro de tipo I en el origen, entonces el sistema (4) tiene un centro isocrono en el origen.

Demostración.

Si $\lambda \in G_1$ entonces el sistema (4) se reduce en su forma compleja al sistema

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Dz^3$$

con $z, A, D \in \mathbb{C}$ y

$$z = x + iy, A = a_1 + ia_2, D = d_1 + id_2 .$$

Como una consecuencia del teorema de la forma normal de Poincaré de un centro no degenerado [MRT] para demostrar que el origen es un centro isocrono hay que encontrar una transformación $w(z) = z + o(z)$ que lleva el sistema $\dot{z} = iz + Az^2 + Dz^3$ al sistema lineal $\dot{w} = iw$.

w es de la forma

$$w(z) = z(z - z_1)^a(z - z_2)^b , \tag{13}$$

y eliminando al tiempo se tiene

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dz}{iz + Az^2 + Dz^3} .$$

Entonces

$$\frac{dw}{dz} = \frac{iw}{iz + Az^2 + Dz^3} . \tag{14}$$

Pero de (13)

$$\frac{dw}{dz} = (z - z_1)^a(z - z_2)^b + az(z - z_1)^{a-1}(z - z_2)^b + bz(z - z_1)^a(z - z_2)^{b-1} .$$

Sustituyendo $\frac{dw}{dz}$ y w en (14) se llega a

$$\begin{aligned} & [(z - z_1)^a(z - z_2)^b + az(z - z_1)^{a-1}(z - z_2)^b + bz(z - z_1)^a(z - z_2)^{b-1}][iz + Az^2 + Dz^3] \\ & = iz(z - z_1)^a(z - z_2)^b . \end{aligned}$$

Entonces

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}\right)(iz + Az^2 + Dz^3) = i .$$

De aquí

$$\begin{aligned} & Az(z^2 - z_1z - z_2z + z_1z_2) + Dz^2(z^2 - z_1z - z_2z + z_1z_2) + ia z^2 - ia z_2z + Aaz^3 \\ & - Aaz_2z^2 + Daz^4 - Daz_2z^3 + ibz^2 - ibz_1z + Abz^3 - Abz_1z^2 + Dbz^4 - Dbz_2z^3 = 0 . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & (D + Da + Db)z^4 + (A - z_1D - z_2D + Aa - Daz_2 + Ab - Dbz_2)z^3 \\ & + (-Az_1 - Az_2 + Dz_1z_2 + ia - Aaz_2 + ib - Abz_1)z^2 + (Az_1z_2 - ia z_2 - ibz_1)z = 0 . \end{aligned}$$

De esta ultima igualdad se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} D(1 + a + b) &= 0 \\ A(1 + a + b) - D(z_1 + z_2(1 + a + b)) &= 0 \\ -A(z_1(1 + b) + z_2(1 + a)) + z_1z_2D + i(a + b) &= 0 \\ z_1z_2A - ia z_2 - ibz_1 &= 0 , \end{aligned}$$

y se obtiene que $z_1 = 0, z_2 = \frac{-i}{A}, a = 0, b = -1$.
Por lo tanto $w(z) = \frac{Az}{Az+i}$ □.

3.4 Centro de tipo II.

Definición 3.5 El sistema (4) tiene un *centro de tipo II* en el origen si el sistema es no lineal y $\lambda \in G_2$.
Usando el algoritmo para calcular los coeficientes periodo correspondientes nos da

Lema 3.6

1. Para $\lambda \in G_2$ se obtuvo que $p_2(\lambda) = -2\pi e_2$.
2. Más aún, al hacer $p_2(\lambda) = 0$ tenemos $p_4(\lambda) = p_6(\lambda) = p_8(\lambda) = 0$.

Con la ayuda de esta información se llegó al siguiente teorema.

Teorema 3.7

Si el origen es un centro de tipo II y $e_2 \neq 0$ entonces el origen es un centro débil de orden 0 del sistema (4).

Demostración.

Si $\lambda \in G_2$ entonces $Re(E) = 0$ y $D = \bar{F}$. De aquí podemos suponer sin pérdida de generalidad que $D = i, E = ie_2$ y $F = -i$ entonces el sistema (3) se reduce a

$$\dot{z} = iz + Az^2 + i(z^3 - z\bar{z}^2) + ie_2z^2\bar{z}, \quad A \in \mathbb{C}, e_2 \in \mathbb{R}.$$

Para esta ecuación existe la siguiente integral primera

$$H = \frac{1 - iAz + i\bar{A}\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}} - e_2 \ln z\bar{z}$$

y por lo tanto por [Po] el origen es un centro.

Para $e_2 \neq 0$ tenemos $p_2(\lambda) \neq 0$ y por definición el origen es un centro débil de orden 0. □

Teorema 3.8

Si el origen es un centro de tipo II con un valor del parámetro tal que $e_2 = 0$ entonces el origen es un centro isocrono del sistema (4).

Demostración.

Suponiendo $e_2 = 0$ con el parámetro $\lambda \in G_2$ entonces el sistema (3) se reduce a

$$\dot{z} = iz + Az^2 + i(z^3 - z\bar{z}^2)$$

y en coordenadas cartesianas queda como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + a_1x^2 - 2a_2xy + a_1y^2 - 4x^2y \\ \dot{y} &= x + a_2x^2 + 2a_1xy - a_2y^2 - 4xy^2\end{aligned}\tag{15}$$

con la integral primera

$$H(x, y) = \frac{1 + 2a_2x + 2a_1y + 2x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}.$$

El cálculo de los coeficientes periodo correspondientes nos da

$$p_2 = p_4 = p_6 = p_8 = 0.$$

Eso nos lleva a conjeturar la isocronicidad del centro correspondiente. La prueba sigue de lo siguiente.

Si el origen es un centro isocrono entonces existe un cambio de coordenadas analítico $u(x, y) = x + o(\|(x, y)\|)$ y $v(x, y) = y + o(\|(x, y)\|)$ que lleva el sistema (16) al sistema isocrono lineal

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v \\ \dot{v} &= u\end{aligned}$$

y es tal que $H(x, y) = u^2(x, y) + v^2(x, y)$ [MRT].

Un método para encontrar las funciones u y v que linearizan es probar con aquellas funciones que cumplan que $H = u^2 + v^2$, una condición suficiente para que estas funciones linearicen es que $\frac{d(\arctan \frac{v}{u})}{dt} = 1$ [MRT].

Otro método para encontrar las funciones linearizantes es construirlas directamente, es decir, proponer que las funciones u y v sean de cierta forma y que están parametrizadas por ciertos parámetros, y al sustituir en

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u_x \dot{x} + u_y \dot{y} = -v \\ \dot{v} &= v_x \dot{x} + v_y \dot{y} = u\end{aligned}$$

determinar los valores de los parámetros que satisfacen el sistema de ecuaciones resultante.

Encontrando las funciones u y v el teorema queda demostrado \square .

3.5 Centro de tipo III.

Definición 3.9 El sistema (4) tiene un *centro de tipo III* en el origen si el sistema es no lineal y $\lambda \in G_3$.

Al calcular los coeficientes periodo obtenemos

Lema 3.10

1. Para $\lambda \in G_3$ se obtuvo que $p_2(\lambda) = -2\pi e_2$.
2. Al hacer $p_2(\lambda) = 0$ se obtuvo que $p_4(\lambda) = 2\pi(d_2f_2 - d_1f_1 + f_1^2 + f_2^2)$.

3. Si $p_2(\lambda) = p_4(\lambda) = 0$ entonces $p_6(\lambda) = 4\pi(f_1^2 + f_2^2)(d_2 + f_2)$.

Con esto se llegó al siguiente teorema.

Teorema 3.11 Si el sistema (4) tiene un centro de tipo III entonces

1. Si $e_2 \neq 0$ el origen es un centro débil de orden cero.
2. Si $e_2 = 0$, pero $d_2f_2 - d_1f_1 + f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ entonces el origen es un centro débil de orden 1.
3. Si $e_2 = d_2f_2 - d_1f_1 + f_1^2 + f_2^2 = 0$ pero $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ y $d_2 + f_2 \neq 0$ entonces el origen es un centro débil de orden 2.
4. Si $e_2 = d_2f_2 - d_1f_1 + f_1^2 + f_2^2 = f_1^2 + f_2^2 = 0$ entonces el origen es un centro isocrono.
5. Si $e_2 = d_2f_2 - d_1f_1 + f_1^2 + f_2^2 = d_2 + f_2 = 0$ y $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ entonces el origen es un centro isocrono.

Demostración.

1. Si $e_2 \neq 0$ entonces $p_2(\lambda) \neq 0$ y por definición el origen es un centro débil de orden 0.
2. Si $e_2 = 0$ entonces $p_2(\lambda) = 0$ y $p_4(\lambda) = 2\pi(d_2f_2 - d_1f_1 + f_1^2 + f_2^2)$, como $d_2f_2 - d_1f_1 + f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ se tiene que $p_4(\lambda) \neq 0$ de aquí el origen es un centro débil de orden 1.
3. Si $e_2 = d_2f_2 - d_1f_1 + f_1^2 + f_2^2 = 0$ entonces $p_2(\lambda) = p_4(\lambda) = 0$ y $p_6(\lambda) = 4\pi(f_1^2 + f_2^2)(d_2 + f_2)$, como $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ y $d_2 + f_2 \neq 0$ se tiene que $p_6(\lambda) \neq 0$, por lo tanto el origen es un centro lineal débil de orden 2.
4. Si $e_2 = f_1^2 + f_2^2 = 0$ entonces $e_2 = f_1 = f_2 = 0$, además como el origen es un centro de tipo III $e_1 = 0$, entonces $\lambda \in G_1$ y el origen es también un centro de tipo I, por lo tanto el origen es un centro isocrono.
5. Si $d_2 + f_2 = 0$ entonces $d_2 = -f_2$, además como el origen es un centro de tipo III $d_1f_2 + d_2f_1 = 0$ de estas dos ultimas igualdades se tiene que $d_1f_2 - f_1f_2 = 0$, entonces $f_2(d_1 - f_1) = 0$ de aquí $d_1 = f_1$ ó $f_2 = 0$; si $f_2 = 0$ entonces $f_1(-d_1 + f_1) = 0$ (ya que $d_2f_2 - d_1f_1 + f_1^2 + f_2^2 = 0$) y como $f_1 \neq 0$ (por ser $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$) se tiene que $-d_1 + f_1 = 0$, por lo tanto $d_1 = f_1$, como el origen es un centro de tipo III $e_1 = 0$, de aquí $\lambda \in G_2$, entonces el origen también es un centro de tipo II, más aún como $e_2 = 0$, se concluye que el origen es un centro isocrono \square .

Como consecuencia de los tres teoremas anteriores y de los teoremas de bifurcación se llegó al siguiente teorema.

Teorema 3.12

Para el sistema (4) se cumple lo siguiente:

1. Si $\lambda \in (G_2 \cup G_3)$ y $e_2 \neq 0$ no hay periodos críticos que se bifurcan del origen.
2. Si $\lambda \in G_3$, $e_2 = 0$ y $f_1^2 + f_2^2 - d_1f_1 + d_2f_2 \neq 0$ a lo más un periodo crítico se bifurca del origen.
Más aún existe una perturbación con un periodo crítico.
3. Si $\lambda \in G_3$, $e_2 = f_1^2 + f_2^2 - d_1f_1 + d_2f_2 = 0$, $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ y $d_2 + f_2 \neq 0$ a lo más dos periodos críticos se bifurcan del origen.

Más aún existe una perturbación con dos periodos críticos.

Demostración.

1. Si $\lambda \in (G_2 \cup G_3)$ y $e_2 \neq 0$ entonces por los teoremas 3.5 y 3.8 el origen es un centro lineal de orden cero, y por el teorema de bifurcación de orden finito no hay periodos críticos que se bifurcan del origen.
2. Si $\lambda \in G_3$, $e_2 = 0$ y $f_1^2 + f_2^2 - d_1 f_1 + d_2 f_2 \neq 0$ entonces por el teorema 3.7 el origen es un centro lineal de orden 1, y por el teorema de bifurcación de orden finito a lo más un periodo crítico se bifurca del origen.

La perturbación con un periodo crítico se sigue de un valor del parámetro tal que $p_2 \times p_4 < 0$, es decir, $e_2 \times f_1^2 + f_2^2 - d_1 f_1 + d_2 f_2 < 0$ según la condición de independencia lineal.

3. Si $\lambda \in G_3$, $e_2 = f_1^2 + f_2^2 - d_1 f_1 + d_2 f_2 = 0$, $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ y $d_2 + f_2 \neq 0$ entonces el origen es un centro lineal de orden 2, y por el teorema de bifurcación de orden finito a lo más dos periodos críticos se bifurcan del origen.

De la misma manera, se construye una perturbación con dos periodos críticos con un valor del parámetro tal que $p_2 \times p_4 < 0$, y $p_4 \times p_6 < 0$ es decir, $e_2 \times (d_2 f_2 - d_1 f_1 + f_1^2 + f_2^2) < 0$, y $(d_2 f_2 - d_1 f_1 + f_1^2 + f_2^2) \times [(f_1^2 + f_2^2)(d_2 + f_2)] < 0$.

□

4 Observaciones finales.

Una cuestión interesante que genera este trabajo es la de la variación del número máximo de puntos críticos bajo perturbaciones pequeñas del parámetro, en ambos casos de centros finitos y de centros isocronos, perturbaciones que cumplen con las condiciones de independencia lineal.

Cabe mencionar que otro punto muy interesante en este trabajo es la técnica moderna de *Computer Assisted Method of Proof* (CAMP), es decir, el uso de software simbólico matemático (Maple en nuestro caso) en una computadora para la demostración de algunos teoremas; sin esta técnica el cálculo “a mano” de los coeficientes periodo hubiera necesitado demasiado tiempo con una muy alta probabilidad de errores.

5 Referencias.

- [CRZ] L.A. Cherkas, V.G. Romanovskii, H. Zoladek *The centre conditions for certain cubic system*, Differential Equations Dynam. Systems 5 (1997), no. 3-4, 299-302.
- [CJ] C. Chicone y M. Jacobs, *Bifurcation of critical periods*, Trans. Amer. Math. Soc. **312** (1989), pp 433-486.
- [CMV] A. Cima, F. Mañosas y J. Villadelprat, *Isochronicity for several classes of Hamiltonian Systems*, J. Differential Equations **157** (1999), 373-413.
- [H] M. Hervé, *Several complex variables*, Oxford Univ. Press, 1963.
- [L] W.S. Loud, *Behavior of the period of certain plane autonomous systems with centers*, Contributions to Differential Equations **3** (1964), 21-36.
- [MRT] P. Marděšić, C. Rousseau y B. Toni, *Linearization of isochronous centers*, J. Differential Equations **121** (1995), pp 67-108.
- [P] I.I. Pleshkan, A new method of investigating the isochronicity of a system of two differential equations, *Differential equations* 5 (1969), pp 796-802.

- [Po] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles., *J. de Mathématiques Pures et Appliquées* 4 (1885), pp 167-244.
- [RT1] C. Rousseau y B. Toni, *Local bifurcation of critical periods in vector fields with homogeneous nonlinearities of the third degree*, *Canad. Math. Bull.* Vol. **36**(4) 1993 pp 473-484.
- [RT2] C. Rousseau y B. Toni, *Local bifurcations of critical periods in the reduced Kukles system*, *Can. J. Math.* Vol. **49**(2), 1997 pp 338-358.
- [T] B. Toni, *Small amplitude critical periods in a cubic polynomial system*, *SWJPAM* Issue 2, 1999, pp 1-12.