Ciclos Límite de primer orden de una 1-forma linearizable.
First Order Limit Cycles from a linearizable 1-form.

J. Hernández-Loreto and B. Toni

CRM-2713

February 2001

Abstract

In this paper we estimate the number of limit cycles (branching points) bifurcating from a polynomial 1-form in the direction of the perturbation.

We show that for the linear 1-form subjected to a n-degree polynomial perturbation the maximum number is $(n-1)/2$ for n odd, and $(n-2)/2$ for n even. We analyze the reduced Kukles 1-form, and prove that the maximum number is three in the direction of a cubic polynomial perturbation. Moreover, in both cases there exist perturbations with the maximum number.

Resumen

En este articulo estimamos el máximo número de ciclos límite (puntos de ramificación) que se bifurcan de una 1-forma diferencial polinomial en la dirección de la perturbación.

Mostramos que para la 1-forma lineal sujeta a una perturbación polinomial de grado n, el máximo número es $(n-1)/2$ para n impar, y $(n-2)/2$ para n par. En el caso de la 1-forma reducida de Kukles, demostramos que el máximo número es tres en la dirección de una perturbación polinomial cúbica. Más aun, en ambos casos existen perturbaciones que alcanzan este máximo número.

Résumé

Dans ce travail nous estimons le nombre de cycles limites (points de branchement) qui bifurquent d'une 1-forme polynomiale dans la direction de la perturbation.

Nous montrons que pour la 1-forme linéale soumise à une perturbation polynomiale de degré n le nombre maximum de cycles limlites est de $\frac{n-1}{2}$ pour n impair, et de $\frac{n-2}{2}$ pour n pair. Dans le cas de la 1-forme réduite isochrone de Kukles, nous prouvons que le nombre maximum est trois dans la direction d'une perturbation polynomiale cubique. En outre, dans les deux cas, il exite des perturbations avec ce maximum de cycles limites.

1. Introducción

Considérese una familia arbitraria autónoma uniparamétrica de 1-formas polinomiales de grado n

$$\omega_\alpha(x,y) = \omega_0(x,y) + \alpha\omega(x,y), \tag{$\mathcal{F}_\alpha$}$$

donde α es un parámetro real pequeño, y

$$\begin{aligned} \omega_0(x,y) &= Q(x,y)dx - P(x,y)dy, \\ \omega(x,y) &= g(x,y)dx - f(x,y)dy, \end{aligned} \tag{1-1}$$

donde $f(x,y)$, $g(x,y)$, $P(x,y)$, y $Q(x,y)$ son polinomios reales en las variables x, y.

De $\omega_\alpha = i_{\mathcal{X}_\alpha} dx \wedge dy$, las soluciones de $\omega_\alpha(x,y) = 0$ están en correspondencia con las órbitas del flujo del campo vectorial

$$\mathcal{X}_\alpha = (P(x,y) + \alpha f(x,y))\partial_x + (Q(x,y) + \alpha g(x,y))\partial_y, \tag{$\mathcal{V}_\alpha$}$$

y con las soluciones del sistema diferencial

$$\dot{x} = P(x,y) + \alpha f(x,y); \quad \dot{y} = Q(x,y) + \alpha g(x,y). \tag{$\mathcal{D}_\alpha$}$$

Cuando ω_0 tiene un centro no degenerado en el origen, por el teorema de la forma normal de Poincaré [Toni$_1$], existe un cambio de coordenadas analítico y regular en el origen,

$$u(x,y) = x + o(|(x,y)|); \quad v(x,y) = y + o(|(x,y)|) \tag{$\mathcal{T}_a$}$$

y una función analítica Ψ tal que

$$\omega_0(u,v) = u(1 + \Psi(u^2+v^2))du + v(1 + \Psi(u^2+v^2))dv.$$

Tal centro está rodeado por un conjunto denso $\mathcal{A}$ de ciclos no triviales. La 1-forma no perturbada ω_0 es *linearizable* cuando el cambio de coordenadas $(\mathcal{T}_a)$ reduce ω_0 a la 1-forma lineal $\mathcal{I}_0(u,v) = udu + vdv$. Al centro en el origen se le llama *centro linearizable.* Nótese que en tal caso los ciclos tienen el mismo periodo constante (o isocrono.)

En [Toni$_1$] se han dado una gran clase de sistemas con una transformación linearizante explícita en la forma de una función de Darboux, es decir, de potencias de polinomios. Nosotros estamos interesados en 1-formas polinomiales linearizables de las cuales su linearización es explícitamente conocida.

Una cuestión interesante es estimar el número de ciclos no triviales Γ en el conjunto $\mathcal{A}$ que sobreviven a una perturbación polinomial de orden k, $k \geq 1$, dando nacimiento a una familia continua (Γ_α) de ciclos límite (ciclos aislados) con $\Gamma_0 = \Gamma$. Al ciclo Γ se le llama *persistente,* y la familia (Γ_α) es una ramificación de ciclos límite.

En la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, la investigación de ciclos límite es una parte difícil e interesante. Los ciclos límite de campos vectoriales planares fueron definidos por Poincaré. En los finales de 1920s Van der Pol, Liénard y Andronov probaron que una trayectoria cerrada de una oscilación autosostenida ocurriendo en un circuito de tubo vacío era un ciclo límite como el considerado por Poincaré. Después de esta observación , la no existencia, existencia, unicidad y otras propiedades de ciclos límite fueron estudiadas extensivamente por matemáticos y físicos, y más recientemente también por químicos, biólogos y economistas.

Tal problema, así como la mayoría de los trabajos sobre campos vectoriales polinomiales en el plano, está relacionado con la segunda parte del problema número 16 de Hilbert, es decir, la estimación del número de ciclos límite para un campo vectorial polinomial de grado n. (ver [A,C,I,E]). Estas cuestiones son similares al problema más general de encontrar el número máximo de ceros de integrales Abelianas sobre Hamiltonianos polinomiales. ([Pe,V]). Aunque todavía complicada, nuestra versión, la estimación del número de pequeños ciclos que se bifurcan de un centro linearizable se reduce a la investigación de ceros simples de una función de bifurcación apropiada. (Ver también [CJ]).

Sea K el conjunto de coeficientes del sistema transformado y perturbado $\overline{\omega}_\alpha$. Para α suficientemente pequeña se define el mapeo de primer regreso de Poincaré $R(\rho,\alpha,K)$ en una sección transversal Σ, el cual es analítico por transversalidad. La correspondiente función de desplazamiento tiene la expansión de Taylor

$$D(\rho,\alpha,K) := R(\rho,\alpha,K) - \rho = \sum_{i=1}^{k} D_i(\rho,K)\alpha^i + O(\alpha^{k+1}), \tag{1-2}$$

donde $D_i(\rho,K)=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i D(\rho,\alpha,K)}{\partial\alpha^i}|_{\alpha=0}$. $D(\rho,0)\equiv 0$.

Los ceros aislados de $D(\rho,\alpha,K)$ corresponden a los ciclos límite de $\overline{\omega}_\alpha$ que intersectan a Σ. Por eso estimar el número máximo de ciclos persistentes no triviales de ω_0 es equivalente a encontrar las raíces de una función de bifurcación apropiada que se obtiene de la función de desplazamiento.

El plan de trabajo es el siguiente: En la sección 1 (introducción), se plantea de forma general el problema a resolver; en la sección 2 (preliminares), se dan las herramientas necesarias para estudiar el problema, tales como algunas definiciones y un teorema; y en la sección 3 (análisis) de dos 1-formas diferenciales linearizables, se presenta en forma detallada el análisis de las dos 1-formas diferenciales en las que se trabajó y se incluyen los resultados del trabajo que se resumen en los teoremas 3.1, 3.4 y los corolarios 3.2 y 3.3.

2. Preliminares

Asumamos que el cambio de coordenadas $\mathcal{T}_a$ es una transformación linearizante $\mathcal{T}_l$, explícitamente conocida y localmente invertible que convierte a la familia $(\mathcal{F}_\alpha)$ en

$$\bar{\omega}_\alpha(u,v)=\mathcal{I}_0(u,v)+\alpha\bar{\omega}(u,v), \qquad (\overline{\mathcal{F}_\alpha})$$

con $\mathcal{I}_0(u,v)=udu+vdv=dH$, y $\bar{\omega}(u,v)=G(u,v)du-F(u,v)dv$, donde

$$H(u,v)=\frac{u^2+v^2}{2};\quad (F(u,v),G(u,v))=J(T_l)(f,g)|_{(u,v)}, \tag{2-1}$$

y $J(T_l)$ denota el Jacobiano de la transformación.

Considérese un elemento $\rho^*\in\Sigma$ tal que

$$D_\alpha(\rho^*,0)=0,\quad \text{y}\quad D_{\rho\alpha}(\rho^*,0)\neq 0\,, \tag{2-2}$$

i.e., ρ^* es un cero simple de D_α; los subíndices α y ρ denotan las derivadas parciales. Por lo tanto, por el Teorema de la Función Implícita, existe una función suave $\rho=\phi(\alpha)$ definida en alguna vecindad de $\alpha=0$, tal que $\phi(0)=\rho^*$ y $D_\alpha(\phi(\alpha),\alpha)\equiv 0$. La curva $\rho=\phi(\alpha)$ corresponde a una familia local de ciclos límite que surgen de la trayectoria periódica Γ_{ρ^*} del sistema no perturbado, la cual intersecta Σ en ρ^*.

Una dificultad está en los cálculos y análisis de las derivadas parciales de $D(\rho,\alpha)$. Claro, para $D_\alpha(\rho,0)\equiv 0$, o si uno de los ceros no es simple, entonces las derivadas de orden mayor deben ser calculadas. De hecho, en $\mathcal{A}$, $D_\alpha(\rho,0)=0$ para todos los valores de ρ, por lo tanto no podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita. Sin embargo, de la serie de Taylor de perturbación

$$D(\rho,\alpha)=\alpha D_\alpha(\rho,0)+O(\alpha^2)=\alpha(D_\alpha(\rho,0)+O(\alpha))=\alpha B(\rho,\alpha), \tag{2-3}$$

con $B(\rho,\alpha):=D_\alpha(\rho,0)+O(\alpha)$, definimos una función de desplazamiento reducida por

$$B(\rho):=D_\alpha(\rho,0), \tag{2-4}$$

para valores reales pequeños de α. Claramente, si $B(\phi(\alpha),\alpha)\equiv 0$ entonces $D(\phi(\alpha),\alpha)\equiv 0$ y el Teorema de la Función Implícita se aplica a B. En otras palabras, un cero simple de B corresponde a la aparición de una familia local $\rho=\phi(\alpha)$ de órbitas periódicas.

Definición (2.1). *Un cero simple ρ^*, de B es llamado punto de ramificación de órbitas periódicas para el sistema $(\overline{\mathcal{F}_\alpha})$. También se dice que la órbita periódica correspondiente Γ_{ρ^*} sobrevive ó persiste después de una perturbación.*

Si ρ^* es una raíz simple de $B(\rho)$ de orden k, i.e., $\partial_\alpha^k D(\rho^*,0)=0$, $\partial_\rho\partial_\alpha^k D(\rho^*,0)\neq 0$, con $\partial_\alpha^i D(\rho^*,0)\equiv 0$, for $i=0,\ldots,(k-1)$, entonces escribiendo la expansión de Taylor de perturbación de *k-ésimo* orden de la función de desplazamiento en la forma

$$D(\rho,\alpha)=\alpha^k(\partial_\alpha^k D(\rho,0)/k!+O(\alpha)):=\alpha^k B_k(\rho,\alpha) \tag{2-5}$$

da $B_k(\rho^*,0)=0$ y $\partial_\rho B_k(\rho^*,0)\neq 0$. Aplicando el Teorema de la Función Implícita a B_k, vemos que por continuidad, hay un número $\alpha_1>0$ y una única función suave $\rho=\phi(\alpha)$ con $|\alpha|<\alpha_1$ tal que $\phi(0)=\rho^*$ y $D_\alpha(\phi(\alpha),\alpha)\equiv 0$. Si ρ^* es una raíz de multiplicidad m, se sigue del Teorema de Preparación de Weierstrass [Po] que hay a lo más m funciones suaves distintas $\rho=\phi_i(\alpha)$.

Definición (2.2). *Tal raíz ρ_* es un punto de ramificación de k-ésimo orden de ciclos límite de $(\overline{\mathcal{F}_\alpha})$. También se dice que la órbita correspondiente $\Gamma\rho_*$ sobrevive o persiste después de una perturbación.*

De aquí el número máximo de puntos de ramificación en el orden k, llamado el *k-ésimo orden de ciclicidad,* del centro linearizable es el número máximo de las raíces simples de la función $B_k(\rho, K)$ de bifurcación de orden k módulo $B_j(\rho, K) \equiv 0, j < k$.

La determinación de los puntos de ramificación de las órbitas periódicas de $(\overline{\mathcal{F}_\alpha})$ se lleva a cabo como sigue: Primero reducimos la función de desplazamiento a una función de bifurcación adecuada y aplicamos el Teorema de la Función Implícita y sus corolarios relacionados. Después identificamos la función de bifurcación en términos del sistema perturbado reducido; los puntos de ramificación son sus ceros simples.

En el primer orden obtenemos

Teorema (2.3). *Un punto de ramificación de primer orden de ciclos límite de $(\bar{\omega}_\alpha)$ es un cero simple de la función*

$$B_1(\rho, K) = \int_0^{2\pi} (F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + G(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta)\, d\theta. \tag{2-6}$$

Esto se sigue directamente de una clásica fórmula de Poincaré (Ver [F])

$$B_1(\rho, K) = D_1(\rho, K) = -\int_{\Gamma\rho} \bar{\omega} \tag{2-7}$$

también llamada la primer función de Poincaré-Andronov-Melnikov $M_1(\rho)$, a lo largo de la línea de nivel $\Gamma\rho: \quad \phi = \rho$. En general ésta es una integral Abeliana/elíptica, y cualquier pregunta acerca de sus ceros es altamente no trivial. Ver [Pe,V].

Observación (2.4). Notemos que cuando $\alpha \longrightarrow 0$, $(\bar{\omega}_\alpha)$ tiende a la 1-forma lineal $(\mathcal{I}_0)$ cuyas curvas de solución son círculos $\Gamma_\rho : u^2 + v^2 = \rho^2$. De aquí los ciclos límite son asintóticos a Γ_ρ.

Demostración del Teorema (2.3).

Sea Γ_α la curva de solución de $\bar{\omega}_\alpha = 0$ entre los puntos ρ y $R(\rho, \alpha)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_0 + \alpha\bar{\omega} &= 0 \\
\int_{\Gamma\alpha} dH &= -\alpha \int_{\Gamma\alpha} \bar{\omega} \\
H(R(\rho, \alpha)) - H(\rho) &= -\alpha \int_{\Gamma\alpha} \bar{\omega} \\
\frac{1}{2}(R^2(\rho, \alpha) - \rho^2) &= -\alpha \int_{\Gamma\alpha} \bar{\omega} \\
\rho B_1(\rho) + \alpha B_1^2(\rho) &= -\int_{\Gamma\alpha} \bar{\omega}.
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando α tiende a 0, obtenemos

$$\rho B_1(\rho) = -\int_{\Gamma\rho} \bar{\omega}$$

y por la definición de integral de formas diferenciales sobre curvas [R], se obtiene

$$\rho B_1(\rho) = -\int_0^{2\pi} (G(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), -F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)) \cdot (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta)\, d\theta$$

$$\rho B_1(\rho) = \rho \int_0^{2\pi} (F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + G(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta)\, d\theta$$

$$B_1(\rho) = \int_0^{2\pi} (F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + G(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta)\, d\theta.$$

□

Esta fórmula puede obtenerse de forma alternativa de la siguiente manera:

Demostración Alternativa.

Dada $D(\rho,\alpha)$ la función de desplazamiento asociada, definida globalmente sobre la sección de Poincaré Σ, la función de bifurcación es definida como $B(\rho) := D_\alpha(\rho,0)$ para pequeños valores de α.

Usando una órbita periódica γ con curva integral $\gamma_\alpha(\rho,t) := (X(t,\rho,\alpha), Y(t,\rho,\alpha))$ comenzando en $(\rho,0)$ obtenemos

$$D_\alpha(\rho,0) = \dot{X}(T(\rho,0),\rho,0)T_\alpha(\rho,0) + X_\alpha(T(\rho,0),\rho,0). \tag{2-8}$$

donde T es la función periodo.

Esta se sigue de $D(\rho,\alpha) = X(T(\rho,\alpha),\rho,\alpha) - \rho$. En $\alpha = 0$ tenemos $\dot{X}(T(\rho,0),\rho,0) = -Y(0,\rho,0) = 0$. Por lo tanto obtenemos que $D_\alpha(\rho,0) = X_\alpha(T(\rho,0),\rho,0)$.

Buscamos $X_\alpha(T(\rho,0),\rho,0)$ integrando la ecuación variacional

$$\begin{aligned}\dot{X}_\alpha &= -Y_\alpha + F(X,Y)\\ \dot{Y}_\alpha &= X_\alpha + G(X,Y)\\ X_\alpha(0,r,0) &= Y_\alpha(0,r,0) = 0.\end{aligned}$$

En forma matricial esto es expresado como

$$\begin{aligned}\dot{W} &= AW + H(t),\\ W(0) &= 0\,,\end{aligned} \tag{2-9}$$

donde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$H(t) = \begin{pmatrix} F(X(t,\rho,\alpha), Y(t,\rho,\alpha)) \\ G(X(t,\rho,\alpha), Y(t,\rho,\alpha)) \end{pmatrix}. \tag{2-10}$$

Por el método de variación de parámetros, obtenemos

$$\begin{aligned}W(T(\rho,0)) &= (X_\alpha(T(\rho,0),\rho,0), Y_\alpha(T(\rho,0),\rho,0))\\ &= \Phi(T(\rho,0)) \int_0^{T(\rho,0)} \Phi^{-1}(\theta) H(\gamma(\rho,\theta))\, d\theta,\end{aligned} \tag{2-11}$$

donde $\Phi(t)$ denota la matriz principal de solución fundamental de $\dot{W} = AW$ en $t = 0$.

Tenemos que

$$\Phi(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{2-12}$$

y $H(\gamma(\rho,t)) = \begin{pmatrix} F(\rho\cos t, \rho\sin t) \\ G(\rho\cos t, \rho\sin t) \end{pmatrix}$.

De aquí, para $T(\rho,0) = 2\pi$, se sigue que

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} X_\alpha(2\pi,\rho,0) \\ Y_\alpha(2\pi,\rho,0) \end{pmatrix} =\\ &\begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} (F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta + G(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta)\, d\theta \\ \int_0^{2\pi} (-F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta + G(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta)\, d\theta \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2-13}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}B_1(\rho) &= D_\alpha(\rho,0) = X_\alpha(2\pi,\rho,0)\\ &= \int_0^{2\pi} (F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta + G(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta)\, d\theta.\end{aligned} \tag{2-14}$$

□

3. Análisis de dos 1-formas diferenciales linearizables

Ahora estudiamos la ramificación de órbitas periódicas para dos casos particulares: la perturbación polinómica de la 1-forma lineal $\mathcal{I}_0$, y de una 1-forma reducida de Kukles. En ambos casos queremos

1. Estimar el número máximo de puntos de ramificación de primer orden.
2. Construir perturbaciones para obtener este máximo número.

3.1 Perturbaciones de la 1-forma lineal $\mathcal{I}_0$.

Consideramos una perturbación polinomial (f,g) de grado n de la 1-forma lineal $\mathcal{I}_0$ como

$$\omega_\alpha(x,y) = \mathcal{I}_0(x,y) + \alpha\omega(x,y), \tag{$\mathcal{I}_\alpha$}$$

con $\mathcal{I}_0(x,y) = xdx + ydy$, y $\omega(x,y) = g(x,y)dx - f(x,y)dy$, donde

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i} f_{i-k,k}x^{i-k}y^k; \quad g(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i} g_{i-k,k}x^{i-k}y^k. \tag{3-1}$$

Entonces estimamos la ramificación de ciclos límite bajo tal perturbación, y construimos una 1-forma perturbada con el máximo número de puntos de ramificación.

En [Toni$_1$], hay varios ejemplos de sistemas para los cuales se da explícitamente una transformación algebraica de linearización. Por lo tanto, existen muchos problemas que pueden ser resueltos usando nuestros resultados. Primero obtenemos el teorema

Teorema (3.1). *De la 1-forma lineal isocrona $\mathcal{I}_0$, a primer orden, no más de $\frac{n-1}{2}$, (respectivamente $\frac{n-2}{2}$) familias continuas de ciclos límite pueden bifurcarse en la dirección de una perturbación polinomial autónoma de grado n, donde n es impar, (respectivamente par).*

Demostración. Como el teorema 2.3 lo dice, los puntos de ramificación de ciclos límite son los ceros simples de la función

$$\begin{aligned} B_1(\rho,K) = &\int_0^{2\pi} \left(F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cos\theta + G(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sin\theta\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i} f_{i-k,k}(\rho\cos\theta)^{i-k}(\rho\sin\theta)^k\cos\theta \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i} g_{i-k,k}(\rho\cos\theta)^{i-k}(\rho\sin\theta)^k sin\theta)d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n}\rho^i\sum_{k=0}^{i}\int_0^{2\pi}\left((f_{i-k,k}\cos\theta + g_{i-k,k}\rho\sin\theta)\cos^{i-k}\theta\sin^k\theta\right)d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n}\rho^i\sum_{k=0}^{i}(f_{i-k,k}\int_0^{2\pi}\left(\cos^{i-k+1}\theta\sin^k\theta\right)d\theta \\ &+ g_{i-k,k}\int_0^{2\pi}(\cos^{i-k}\theta\sin^{k+1}\theta)d\theta). \end{aligned} \tag{3-2}$$

Esta pude ser simplificada utilizando la bien conocida regla

$$\int_0^{2\pi}(\cos^m\theta\sin^n\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0, & \text{para } m \text{ o } n \text{ impar} \\ \frac{m!n!}{2^{m+n}(\frac{m}{2})!(\frac{n}{2})!(\frac{m+n}{2})!}2\pi, & \text{para } m \text{ y } n \text{ par} \end{cases} \tag{3-3}$$

Como resultado obtenemos

$$B_1(\rho,K) = \rho\sum_{i\ impar,\ i=1}^{N}\rho^{i-1}C_i.$$

Donde

$$\begin{aligned} C_i = &f_{i,0}\int_0^{2\pi}\left(\cos^{i+1}\theta\right)d\theta + g_{0,i}\int_0^{2\pi}\left(\sin^{i+1}\theta\right)d\theta \\ &+ \sum_{k=1,\ k\ impar}^{i-2}(g_{i-k,k} + f_{i+1-k,k-1})\int_0^{2\pi}\left(\cos^{i-k}\theta\sin^{k+1}\theta\right)d\theta \end{aligned} \tag{3-5}$$

y

$$N = \begin{cases} n, & \text{para } n \text{ impar} \\ n-1, & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \tag{3-6}$$

Así que el máximo número de ceros simples $M(n)$ de $B_1(\rho,K)$ es $M(n) = (n-1)/2$ para n impar y $(n-2)/2$ para n par. $\square$

Corolario (3.2). *De una trayectoria periódica γ_0 en el anillo de soluciones periódicas $\mathcal{A}$ de la 1-forma lineal isocrona $\mathcal{I}_0$, a lo más una familia de ciclos límite se bifurca de γ_0 en la dirrección de una perturbación polinomial autónoma cúbica. El número máximo (uno), es obtenido si y sólo si los coeficientes del polinomio de perturbación satisfacen la condición $a_0a_2 < 0$, donde a_0 y a_2 se dan enseguida. En este ejemplo la familia emerge de la raíz real simple positiva de la función cuadrática $\Delta(\rho) = a_0 + a_2\rho^2$.*

Demostración. En este caso obtenemos la función de bifurcación

$$B_1(\rho) = \pi\rho(f_{1,0} + g_{0,1} + \frac{1}{4}\rho^2(3f_{3,0} + g_{2,1} + f_{1,2} + 3g_{0,3})). \tag{3-7}$$

Definamos

$$a_0 := f_{1,0} + g_{0,1}, \quad a_2 := \frac{1}{4}(3f_{3,0} + f_{1,2} + g_{2,1} + 3g_{0,3}). \tag{3-8}$$

Si $a_0 = 0$ y $a_2 \neq 0$ entonces el origen es la única raíz de $B_1(\rho)$, pero si $a_0 \neq 0$ entonces las raíces de $B_1(\rho)$ están dadas por $\rho^2 = -a_2/a_0$. De aquí la condición $a_0a_2 < 0$ da exactamente dos raíces reales de signo opuesto que deben de ser simples. Sólo contamos la raíz positiva. Así podemos construir perturbaciones con la condición $a_0a_2 < 0$ y obtendremos el máximo número de familias de ciclos límite que emergen, que en este caso es 1. Tal familia emerge de la raíz real positiva simple de la función cuadrática $\Delta(\rho) = a_0 + a_2\rho^2$. $\square$

Corolario (3.3). *De una trayectoria periódica γ_0 en el anillo de soluciones periódicas $\mathcal{A}$ de la 1-forma lineal isocrona $\mathcal{I}_0$, a lo más dos familias de ciclos límite se bifurca de γ_0 en la dirrección de una perturbación polinomial autónoma de grado 5. El número máximo, dos, es obtenido si y sólo si los coeficientes del polinomio de perturbación satisfacen las condiciones $a_2^2 - 4a_4a_0 > 0$, $a_2a_4 < 0$ y $a_0a_4 > 0$, donde a_0, a_2 y a_4 se definen enseguida. Tales familias emergen de las raíces reales positivas simples de la función de orden 4, $\Delta(\rho) = a_0 + a_2\rho^2 + a_4\rho^4$, que están dadas por $\rho = \sqrt{\frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4a_0}}{2a_4}}$.*

Demostración. En este caso la función de bifurcación está dada por

$$\begin{aligned} B_1(\rho) =& \pi\rho(f_{1,0} + g_{0,1} + \frac{1}{4}\rho^2(3f_{3,0} + g_{2,1} + f_{1,2} + 3g_{0,3}) + \\ & \frac{1}{8}\rho^4(5f_{5,0} + f_{3,2} + f_{1,4} + g_{4,1} + g_{2,3} + 5g_{0,5})). \end{aligned} \tag{3-9}$$

Definamos

$$\begin{aligned} & a_0 := f_{1,0} + g_{0,1}, \quad a_2 := \frac{1}{4}(3f_{3,0} + f_{1,2} + g_{2,1} + 3g_{0,3}), \\ & a_4 := \frac{1}{8}(5f_{5,0} + f_{3,2} + f_{1,4} + g_{4,1} + g_{2,3} + 5g_{0,5}). \end{aligned} \tag{3-10}$$

Entonces nos interesa conocer las raíces positivas de la función $\Delta(\rho) = a_0 + a_2\rho^2 + a_4\rho^4$, la cual tendrá un máximo de raíces positivas sólo si $a_0 \neq 0$,$a_2 \neq 0$,$a_4 \neq 0$, si hacemos $\rho^2 = r$ obtenemos la ecuación $\Delta(r) = a_0 + a_2r + a_4r^2$, que tiene dos soluciones reales y diferentes si y sólo si $a_2^2 - 4a_4a_0 > 0$ y las dos son positivas si y sólo si $\frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4a_0}}{2a_4} > 0$. Si $a_4 > 0$ entonces $-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4a_0} > 0$ entonces $a_2 < 0$ y $\sqrt{a_2^2 - 4a_4a_0} < -a_2$ entonces $a_0a_4 > 0$. Si $a_4 < 0$ entonces $-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4a_0} < 0$ entonces $a_2 > 0$ y $\sqrt{a_2^2 - 4a_4a_0} < a_2$ entonces $a_0a_4 > 0$. Así que $\Delta(\rho) = a_0 + a_2\rho^2 + a_4\rho^4$ tiene dos raíces positivas si y sólo si $a_2^2 - 4a_4a_0 > 0$, $a_2a_4 < 0$ y $a_0a_4 > 0$, y las raíces están dadas por $\rho = \sqrt{\frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4a_0}}{2a_4}}$. $\square$

3.2 Una 1-forma reducida de Kukles.

Consideremos la 1-forma reducida de Kukles

$$\varpi_{\mathcal{L}}(x, y) = (x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2)dx + ydy \tag{$\mathcal{L}$}$$

$a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. en [Toni$_2$] se demostró el siguiente teorema.

Linearizabilidad. *El origen es un centro linearizable de $(\mathcal{L})$ si y sólo si la 1-forma es lineal o puede ser llevada, a través de un reescalamiento de (x, y) y t a la forma*

$$\omega_{\mathcal{L}_0}(x, y) = (x + 3xy + x^3)dx + ydy. \tag{$\mathcal{L}_0$}$$

Más aún, una linerización racional de cambio de coordenadas del sistema $(\mathcal{L}_0)$ está dada por

$$(u(x, y), v(x, y)) = \left(\frac{x}{x^2 + y + 1}, \frac{x^2 + y}{x^2 + y + 1}\right). \tag{$\mathcal{T}_l$}$$

3.2.1 Función de Bifurcación de primer orden.

Consideremos una perturbación uniparamétrica autónoma ($\mathcal{L}_\alpha$) de la 1-forma ($\mathcal{L}_0$) en la forma

$$\omega_\alpha(x,y) = \omega_{\mathcal{L}_0}(x,y) + \alpha\omega(x,y), \tag{$\mathcal{L}_\alpha$}$$

con $\omega(x,y) = g(x,y)dx - f(x,y)dy$, donde

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{i} f_{i-k,k}x^{i-k}y^k; \quad g(x,y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{i} g_{i-k,k}x^{i-k}y^k. \tag{3-11}$$

El cambio de coordenadas de linearización ($\mathcal{T}_l$) da

$$x(u,v) = \frac{u}{1-v}; \quad y(u,v) = \frac{v-(u^2+v^2)}{(1-v)^2}. \tag{3-12}$$

El sistema ($\mathcal{L}_\alpha$) es transformado vía ($\mathcal{T}_l$) en

$$\bar{\omega}_\alpha(u,v) = \mathcal{I}_0(u,v) + \alpha\bar{\omega}(u,v), \tag{$\bar{\mathcal{L}}_\alpha$}$$

con $\bar{\omega}(u,v) = G(u,v)du - F(u,v)dv$, y $(F(u,v), G(u,v)) = J(T_l)(f,g)|_{(u,v)}$, esto es,

$$\begin{aligned}
F(u,v) &= (1-2u^2-v)f\left(\frac{u}{1-v}, \frac{v-(u^2+v^2)}{(1-v)^2}\right) - u(1-v)g\left(\frac{u}{1-v}, \frac{v-(u^2+v^2)}{(1-v)^2}\right)\\
&=(1-2u^2-v)\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{i} f_{i-k,k}(\frac{u}{1-v})^{i-k}(\frac{v-(u^2+v^2)}{(1-v)^2})^k\\
&\quad - u(1-v)\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{i} g_{i-k,k}(\frac{u}{1-v})^{i-k}(\frac{v-(u^2+v^2)}{(1-v)^2})^k.\\
G(u,v) &= 2u(1-v)f\left(\frac{u}{1-v}, \frac{v-(u^2+v^2)}{(1-v)^2}\right) + (1-v)^2 g\left(\frac{u}{1-v}, \frac{v-(u^2+v^2)}{(1-v)^2}\right)\\
&=2u(1-v)\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{i} f_{i-k,k}(\frac{u}{1-v})^{i-k}(\frac{v-(u^2+v^2)}{(1-v)^2})^k\\
&\quad + (1-v)^2\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{i} g_{i-k,k}(\frac{u}{1-v})^{i-k}(\frac{v-(u^2+v^2)}{(1-v)^2})^k.
\end{aligned} \tag{3-13}$$

Determinamos la función de bifurcación de primer orden como

$$B_1(\rho,K) = \sum_{i=1}^{3}\rho^i\sum_{k=0}^{i}(I_1^{ik}f_{i-k,k} + I_2^{ik}g_{i-k,k}), \tag{3-14}$$

con

$$\begin{aligned}
I_1^{ik} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^{i-k+1}\theta(\sin\theta-\rho)^k(1-2\rho^2+\rho\sin\theta)}{(1-\rho\sin\theta)^{i+k}}d\theta\\
I_2^{ik} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^{i-k}\theta(\sin\theta-\rho)^{k+1}}{(1-\rho\sin\theta)^{i+k-1}}d\theta.
\end{aligned} \tag{3-15}$$

Entonces buscamos el número máximo de ceros simples de B_1, lo cual da la estimación del numero de puntos de ramificación de ciclos límite.

Para resolver tal problema se usarán técnicas de la teoría de integrales Abelianas Elípticas y de la teoría de residuos [Go].

3.2.2 Los ceros de la función de bifurcación.

Para encontrar los ceros simples de $B_1(\rho,K) = \sum_{i=1}^{3}\rho^i\sum_{k=0}^{i}(I_1^{ik}f_{i-k,k} + I_2^{ik}g_{i-k,k})$ necesitamos resolver las integrales I_1^{ik} y I_2^{ik};, para esto hacemos el cambio de variable $z = \exp(i\theta)$ y obtenemos las integrales de línea

$$I_1^{jk} = 2^{k-2} i^{j-2} (-\frac{1}{\rho})^{j+k} \int_{S^1} \frac{(\rho z^2 + 2i(1-2\rho^2)z - \rho)(z^2+1)^{j-k+1}(z^2 - 2i\rho z - 1)^k}{(z - i\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho})^{j+k}(z - i\frac{1-\sqrt{1-\rho^2}}{\rho})^{j+k} z^{3-k}} dz$$

$$= 2^{k-2} i^{j-2} (-\frac{1}{\rho})^{j+k} \int_{S^1} \mathcal{G}_1^{jk}(z) dz \qquad (3\text{-}16)$$

$$I_2^{jk} = 2^{k-2} i^{j-3} (-\frac{1}{\rho})^{j+k-1} \int_{S^1} \frac{(z^2+1)^{j-k}(z^2 - 2i\rho z - 1)^{k+1}}{(z - i\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho})^{j+k-1}(z - i\frac{1-\sqrt{1-\rho^2}}{\rho})^{j+k-1} z^{3-k}} dz$$

$$= 2^{k-2} i^{j-3} (-\frac{1}{\rho})^{j+k-1} \int_{S^1} \mathcal{G}_2^{jk}(z) dz, \qquad (3\text{-}17)$$

donde S^1 es el círculo unitario. Como $b_1 = 0$ y $b_2 = i\frac{1-\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}$ son polos de $\mathcal{G}_1^{jk}$ y $\mathcal{G}_2^{jk}$ en el interior de S^1, por el Teorema del Residuo entonces,

$$I_1^{jk} = 2^{k-1}\pi i^{j-1}(-\frac{1}{\rho})^{j+k}(R_1^{jk}(b_1) + R_1^{jk}(b_2)).$$

$$I_2^{jk} = 2^{k-1}\pi i^{j-2}(-\frac{1}{\rho})^{j+k-1}(R_2^{jk}(b_1) + R_2^{jk}(b_2)). \qquad (3\text{-}18)$$

donde, $R_l^{jk}(b_h) = Res_l^{jk}(b_h)$ son los residuos de b_h, $l = 1,\ 2,\ h = 1,\ 2.$

y obtenemos,

$$\begin{aligned}
&I_1^{10} = \frac{1}{2}\pi\frac{1}{\rho^2}(2(4-5\rho^2) - 8(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}); \quad I_1^{11} = I_1^{20} = 0\\
&I_1^{21} = \frac{2\pi}{\rho^3}((\rho^2-4)\sqrt{1-\rho^2} + 4 - 3\rho^2); \quad I_1^{30} = -\frac{3\pi}{\rho^4}(2(\rho^2-3)\sqrt{1-\rho^2} + 6 - 5\rho^2)\\
&I_1^{22} = I_1^{31} = 0; \quad I_1^{32} = \frac{2\pi}{\rho^4}(\frac{1}{4}\frac{2\rho^2+\rho^4-4}{\sqrt{1-\rho^2}} + 1)\\
&I_1^{33} = I_2^{10} = 0; \quad I_2^{11} = \frac{2\pi}{\rho^2}((1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} - (1-2\rho^2)) \qquad (3\text{-}45)\\
&I_2^{20} = \frac{\pi}{\rho^3}((2-3\rho^2) - 2(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}); \quad I_2^{21} = I_2^{30} = 0\\
&I_2^{22} = \frac{2\pi}{\rho^3}(\frac{1}{2}(\rho^2+2)\sqrt{1-\rho^2} - 1); \quad I_2^{31} = \frac{\pi}{\rho^4}((\rho^2-6)\sqrt{1-\rho^2} + 2(3-2\rho^2))\\
&I_2^{32} = 0; \quad I_2^{33} = \frac{3}{4}\pi\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}.
\end{aligned}$$

Así, $B_1(\rho, K)$ está dada por

$$\begin{aligned}
B_1(\rho,K) = &\ \rho(f_{10}\frac{1}{2}\pi\frac{1}{\rho^2}(2(4-5\rho^2) - 8(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}) + g_{01}\frac{2\pi}{\rho^2}((1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} - (1-2\rho^2)))\\
&+ \rho^2(g_{20}\frac{\pi}{\rho^3}((2-3\rho^2) - 2(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}) + f_{11}\frac{2\pi}{\rho^3}((\rho^2-4)\sqrt{1-\rho^2} + 4 - 3\rho^2)\\
&\quad + g_{02}\frac{2\pi}{\rho^3}(\frac{1}{2}(\rho^2+2)\sqrt{1-\rho^2} - 1))\\
&+ \rho^3(-f_{30}\frac{3\pi}{\rho^4}(2(\rho^2-3)\sqrt{1-\rho^2} + 6 - 5\rho^2) \qquad (3\text{-}46)\\
&\quad + g_{21}\frac{\pi}{\rho^4}((\rho^2-6)\sqrt{1-\rho^2} + 2(3-2\rho^2)) + f_{12}\frac{2\pi}{\rho^4}(\frac{1}{4}\frac{2\rho^2+\rho^4-4}{\sqrt{1-\rho^2}} + 1)\\
&+ \quad g_{03}\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}).
\end{aligned}$$

Queremos encontrar las soluciones de $B_1(\rho, K) = 0$. Multiplicando por $\frac{\rho}{\pi}$, asociando, desarrollando y simplificando obtenemos

$$A\rho^6 + B\rho^4 + C\rho^2 + D = 0, \qquad (3\text{-}49)$$

donde definimos

$$A := -\frac{1}{16}(-3g_{03}+8f_{11}+16f_{10}-8g_{01}+8f_{11}-24f_{30}+4g_{21}-2f_{12}+4g_{02})^2.$$

$$\begin{aligned}
B := &-\frac{21}{2}g_{03}g_{21}-\frac{3}{2}g_{03}f_{12}-15g_{03}f_{11}-12g_{03}f_{10}+6g_{03}g_{01}-6g_{03}g_{20}+\frac{3}{2}g_{03}g_{02}\\
&+36g_{03}f_{30}+4g_{20}g_{02}-54g_{20}f_{30}+12g_{20}g_{21}-2{g_{02}}^2-36g_{02}f_{30}+12g_{02}g_{21}\\
&+3g_{02}f_{12}+4{f_{11}}^2+52f_{11}f_{10}-8f_{11}g_{01}+20f_{11}g_{20}+16f_{11}g_{02}-36f_{11}f_{30}\\
&-6f_{11}f_{12}+39{f_{10}}^2-24f_{10}g_{01}+34f_{10}g_{20}+8f_{10}g_{02}-138f_{10}f_{30}+32f_{10}g_{21}\\
&-8g_{01}g_{20}-4g_{01}g_{02}+24g_{01}f_{30}-4g_{01}g_{21}+7{g_{20}}^2-2{g_{21}}^2-5g_{21}f_{12}-{f_{12}}^2\\
&+63{f_{30}}^2-12f_{30}g_{21}+12f_{30}f_{12}.\\
C := &\,9g_{03}g_{21}+3g_{03}f_{12}+12g_{03}f_{11}+6g_{03}f_{10}-3g_{03}g_{01}+3g_{03}g_{20}-3g_{03}g_{02}\\
&-27g_{03}f_{30}+30g_{20}f_{30}-8g_{20}g_{21}-2g_{20}f_{12}+3{g_{02}}^2+24g_{02}f_{30}-10g_{02}g_{21}\\
&-4g_{02}f_{12}-52f_{11}f_{10}-16f_{11}g_{01}-12f_{11}g_{20}-12f_{11}g_{02}+12f_{11}f_{30}+4f_{11}g_{21}\\
&+4f_{11}f_{12}-31{f_{10}}^2+4f_{10}g_{01}-22f_{10}g_{20}+4f_{10}g_{02}+126f_{10}f_{30}-36f_{10}g_{21}\\
&-8f_{10}f_{12}+8{g_{01}}^2-4g_{01}g_{20}+4g_{01}g_{02}+36g_{01}f_{30}-12g_{01}g_{21}-2g_{01}f_{12}-3{g_{20}}^2\\
&+3{g_{21}}^2+4g_{21}f_{12}+{f_{12}}^2-27{f_{30}}^2-6f_{30}f_{12}.
\end{aligned}$$

$$D := 4(g_{01}+f_{10})(2f_{10}+4f_{11}+3g_{21}-g_{01}+f_{12}+g_{20}-9f_{30}-g_{02}). \tag{3-50}$$

Sea $r=\rho^2$. Entonces nos interesa estudiar las raíces positivas de la función $\Delta(r)=Ar^3+Br^2+Cr+D$.

Teorema (3.4). *De una trayectoria periódica γ_0 en el anillo de soluciones periódicas de la 1-forma no-lineal isocrona $(\mathcal{L}_0)$, no más de tres familias continuas de ciclos límite se bifurcan en la dirección de una perturbación polinomial cúbica (f,g). Este número máximo (tres) se alcanza si y sólo si*

$$\begin{aligned}
&B^2-3AC>0\\
&\Delta\Big(\frac{-B+\sqrt{B^2-3AC}}{3A}\Big)\Delta\Big(\frac{-B-\sqrt{B^2-3AC}}{3A}\Big)<0,\\
&AB<0;\quad BC<0;\quad y\quad CD<0.
\end{aligned}\tag{3-51}$$

Demostración. De acuerdo con el teorema 2.3, los puntos de ramificación de ciclos límite son los ceros simples de la función $B_1(\rho,K)$, pero los ceros simples de ésta, corresponden a las raíces positivas de $\Delta(r)=Ar^3+Br^2+Cr+D$ donde A, B, C, y D se definen como antes. Por lo tanto no más de tres familias de ciclos límite pueden bifurcarse.

La función $\Delta(r)$ tiene tres ceros reales y diferentes sólo si la ecuación $\Delta'(r)=0$ tiene dos soluciones reales diferentes r_1 y r_2, y $\Delta(r_1)$ y $\Delta(r_2)$ son diferentes de cero y tienen signo contrario, esto pasa sólo si $B^2-3AC>0$ y $\Delta(\frac{-B+\sqrt{B^2-3AC}}{3A})\Delta(\frac{-B-\sqrt{B^2-3AC}}{3A})<0$.

Más aún, la regla de los signos de Descartes nos dice que el número de cambios de signo v de los coeficientes de un polinomio menos el número de raíces positivas p es un número par no negativo, i,e. $v-p=2k$, donde k es un entero no negativo. En este caso $\Delta(r)$ es un polinomio de tercer grado, así que $0\leq v\leq 3$ y $0\leq p\leq 3$ entonces $r=v-2k=3$ si y sólo $v=3$ y esto pasa si y sólo si $AB<0$, $BC<0$ y $CD<0$. □

4. Observaciones finales

La integral $B_1(\rho,\alpha)$ es la primera variación de la función de desplazamiento con respecto al parámetro de bifurcación, y sus ceros simples son los puntos de ramificación de ciclos límite. Si son idénticamente cero las variaciones de orden mayor tienen que ser calculadas y analizadas. Saber cuantas variaciones son suficientes para hacer las conclusiones finales acerca de los ciclos límite no es nada trivial. Este es el contenido principal del resultado de Bautin [B] para una 1-forma cuadrática que inspira [CJ].

Más aún, deseamos enfatizar que el método descrito arriba podría ser aplicado con mucho éxito al caso más general de 1-formas linearizables de Darboux [Toni$_1$].

Dirección

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del Estado de Morelos

Cuernavaca 62210, México
E.mails: toni@servm.fc.uaem.mx. jloreto@servm.fc.uaem.mx
and
Centre de recherche mathématique
Université de Montréal, Succ. Centre-ville
Montréal, Qc H3C 3J7 Canada
E.mail: toni@crm.umontreal.ca

5. Referencias

[A] V.I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, (J. Szücs Translator) Springer-Verlag, New York, 1962.

[B] N.N. Bautin, *On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium point of focus or center type*, Amer. Math. Transl. series 1 **5** (1962), 396-413.

[C] C. Chicone, *On Bifurcation of Limit Cycles from Centers*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag: Bifurcations of Planar vector fields **1455** (1990), 20-43.

[CJ] C. Chicone, M. Jacobs, *Bifurcation of Limit Cycles from Quadratic Isochrones*, J. of Differential Equations **91** (1991), 268-327.

[E] J. Ecalle, *Finitude des cycles limites et accéléro-sommation de l'Application de retour*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag : Bifurcations in Planar Vector Fields **1455** (1990), 74-159.

[F] J.P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector fields*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **16** (1996), 87-96.

[Go] M.O. Gonzales, *Classical Complex Analysis*, Pure and Applied Mathematics Series, Marcel Dekker Inc., 1992.

[I] Yu. Il'yashenko, *Finitness Theorems for limit cycles*, Russian Math. Surveys **45** (1990), 129-203.

[Pe] G.S. Petrov, *Number of zeros of complete elliptic integral*, Functional Anal.Appl. **18** (1984), 73-74.

[Po] J. Poenaru, *Analyse Differentielle*, vol. 371, Springer Lectures Notes in math, 1974.

[Toni_1] P. Mardešić, C. Rousseau, B. Toni, *Linearization of Isochronous centers*, J. Differential Equations **121** (1995), 67-108.

[Toni_2] C. Rousseau, B. Toni, *Local Bifurcations of critical periods in the reduced Kukles system*, Can. J. Math. **49(2)** (1997), 338-358.

[Toni_3] B. Toni, *Higher Order Branching of Periodic Orbits from Polynomial Isochrones*, E.J.Diff.Eqns **1999 No.35** (1999), 1-15.

[V] A.N. Varchencko, *Estimation of the number of zeros of an Abelian integral depending on a parameter, and limit cycles*, Functional Anal.Appl. **18** (1984), 98-108.

[R] W. Rudin, *Integration of Differential Forms*, Principles of Mathematical Analysis (1976), 254.