Approximation de la solution d'une équation différentielle ordinaire avec impulsions qui dépendent de l'état

F. Dubeau*† A. Ouansafi‡§ A. Sakat‡

CRM-2706

January 2001

*Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke (Québec), Canada, J1K 2R1.

†Travail subventionné par le CRSNG.

‡Université Mohamed V, Faculté des Sciences , Département de mathématiques et d'informatique, B.P.1014, Rabat, Maroc.

§Cet auteur remercie le Centre de Recherches Mathématiques de l'Université de Montréal pour son accueil chaleureux durant son séjour.

1 Introduction

L'objectif de ce travail est de présenter une méthode d'approximation de la solution d'un système d'équations différentielles ordinaires avec des impulsions qui dépendent de l'état en utilisant une méthode de type Galerkin. La solution de ce système d'équations différentielles ordinaires avec impulsions est une fonction à variation bornée qui est non régulière et contient des sauts [7, 8].

Ces équations différentielles proviennent de problèmes physiques et en particulier de problèmes du domaine de l'aérospatiale. Ces équations différentielles sont de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) + \sum_{j \in J} \alpha_j(x(\tau_j^-))\delta(t - \tau_j), & t \in [0, T], \\ x(0) = x^0, \end{cases} \tag{1}$$

où T est un nombre réel strictement positif, $x^0 \in E$ est la condition initiale, E est un espace euclidien de dimension finie $d = dimE \geq 1$ de la forme $E = \mathbb{R}^d$, $x : [0, T] \longrightarrow E$ est une fonction vectorielle, $f : E \times [0, T] \longrightarrow E$ est une application donnée, $\delta(.)$ est la distribution de Dirac au point 0, $J \subseteq \mathbb{N}$ est un ensemble non vide dénombrable d'indices, $\alpha_j : E \longrightarrow E$ est une fonction donnée pour tout $j \in J$ et $\{\tau_j\}_{j \in J}$ est une suite strictement croissante dans $]0, T]$.

Dans [6], une formulation variationnelle faible est utilisée pour obtenir un théorème d'existence et d'unicité de la solution de (1). Une approximation de cette solution utilisant une méthode de type Galerkin a également été présentée et les ordres de convergence obtenus sont en $O(h^{1/2})$ pour l'erreur dans $L^2(0, T; E)$ et en $O(h^1)$ pour l'erreur aux noeuds. Dans le cas où les impulsions ne dépendent pas de l'état il y a une superconvergence aux noeuds en $O(h^{K+2})$, voir [2]. Cependant dans le cas où la solution est dans $H^{K+1}(0, T; E)$ les ordres de convergence sont en $O(h^{K+1})$ pour la norme de $L^2(0, T; E)$ et en $O(h^{2K+2})$ pour l'erreur aux noeuds, voir [3] et [5].

Dans notre travail nous utilisons une transformation qui permet d'écrire l'équation différentielle ordinaire avec des impulsions qui dépendent de l'état sous la forme d'une équation différentielle équivalente sans impulsion et nous montrons que cette dernière a une solution unique dans $H^1(0, T; E)$. Cette transformation trouve également son utilité dans les approximations numériques. En effet, pour approcher la solution de (1), il suffit de trouver une solution approchée du problème équivalent dont la solution est régulière. Nous constatons alors une légère amélioration des ordres de convergence. De plus la solution approchée est de même nature que la solution de (1) à savoir dans $BV(0, T; E)$.

Dans la section 2 nous présentons le problème sans impulsion équivalent au problème (1). Ensuite nous obtenons une formulation variationnelle équivalente au problème sans impulsion et nous montrons le résultat d'existence et d'unicité de la solution sous des hypothèses plus faibles que dans [6]. Dans la section 4 on introduit des espaces d'approximation pour obtenir une approximation polynômiale par morceaux de la solution. Ensuite nous montrons que les ordres de convergence sont en $O(h^1)$ pour l'erreur dans $L^2(0, T; E)$ et aux noeuds. Dans le cas où les impulsions ne dépendent pas de l'état, nous montrons que nous avons des résultats de superconvergence aux noeuds, nous obtiendrons $O(h^2)$ pour les systèmes non linéaires et $O(h^{K+2})$ pour les systèmes linéaire. Enfin nous utilisons une formule d'intégration numérique qui conduit à des approximations numériques de la solution et nous présentons des exemples qui indiquent que les estimations d'erreur sont optimales.

2 Transformation du problème en une équation différentielle ordinaire sans impulsion

Une solution de (1) est une fonction à variation bornée qui s'écrit sous la forme

$$x(t) = x^0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau + \sum_{j \in J} \alpha_j(x(\tau_j^-)) \chi_{[\tau_j, \infty)}(t); \tag{2}$$

elle contient donc deux parties, la première partie est une fonction régulière de $H^1(0, T; E)$

$$x_R(t) = x^0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau$$

et la deuxième partie est la fonction des sauts

$$x_J(t) = \sum_{j \in J} \alpha_j(x(\tau_j^-)) \chi_{[\tau_j, \infty)}(t).$$

Considérons les deux familles de fonctions $\{\theta_j\}_{j \in J}$ et $\{\beta_j\}_{j \in J}$, de $C(0, T; E)$ dans E, définies par

$$\begin{cases} \theta_1(y) = y(\tau_1), \\ \theta_j(y) = y(\tau_j) + \sum\limits_{i<j} \alpha_i \circ \theta_i(y) \text{ pour } j > 1 \end{cases}$$

et

$$\beta_j = \alpha_j \circ \theta_j, j \in J$$

pour toute fonction y de $C(0, T; E)$. Le problème (1) est alors équivalent à l'équation différentielle ordinaire sans impulsion suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_R(t) = f(x_R(t) + \sum\limits_{j \in J} \beta_j(x_R) \chi_{[\tau_j, \infty)}(t), t), \qquad t \in [0, T], \\ x_R(0) = x^0, \end{cases} \tag{3}$$

Considérons la fonction F définie de $C(0, T; E) \times [0, T]$ dans E par

$$F(y, t) = f(y(t) + \sum_{j \in J} \beta_j(y) \chi_{[\tau_j, \infty)}(t), t). \tag{4}$$

Alors l'équation précédente devient

$$\begin{cases} \dot{x}_R(t) = F(x_R, t), \qquad t \in [0, T], \\ x_R(0) = x^0. \end{cases} \tag{5}$$

Trouver la solution $x(t)$ de 1) revient donc à trouver la fonction $x_R(t)$ solution de (5) puisque $x(t) = x_R(t) + \sum\limits_{j \in J} \beta_j(x_R) \chi_{[\tau_j, \infty)}(t)$, voir [8].

3 Formulation faible

En utilisant la méthode de Galerkin nous allons approcher la solution de (5) par une fonction u_h polynômiale par morceaux. Les valeurs $u_h(\tau_j)$ approchent les $x_R(\tau_j)$ ($j \in J$). Nous montrons enfin que $u_h + \sum\limits_{j \in J} \beta_j(u_h) \chi_{[\tau_j, \infty)}$ converge bien vers la solution de (1).

L'équation (5) est équivalente au problème faible global suivant

$$\begin{cases} \text{trouver } (x_R, X) \in H^1(0,T;E) \times E \text{ tel que} \\ X \cdot v(T) - \int_0^T x_R(\tau) \cdot \dot{v}(\tau) d\tau = x^0 \cdot v(0) + \int_0^T F(x_R,\tau) \cdot v(\tau) d\tau, \\ \text{pour tout } \ v \in H^1(0,T;E). \end{cases} \tag{6}$$

Théorème 3.1 *Les équations (5) et (6) sont équivalentes.*

Démonstration :Si (5) a une solution alors en multipliant par $v \in H^1(0,T;E)$ et en intégrant par partie le terme $\int_0^T \dot{x}_R(\tau) \cdot v(\tau) d\tau$ nous obtenons

$$x_R(T) \cdot v(T) - x_R(0) \cdot v(0) - \int_0^T x_R(\tau) \cdot \dot{v}(\tau) d\tau = \int_0^T F(x_R,\tau) \cdot v(\tau) d\tau.$$

En posant $x_R(T) = X$ et $x_R(0) = x^0$, nous obtenons une solution de (6).

Inversement, si (6) a une solution, en intégrant par partie on a

$$[X - x_R(T)] \cdot v(T) + [x_R(0) - x^0] \cdot v(0) + \int_0^T [\dot{x}_R(\tau) - F(x_R,\tau)] \cdot v(\tau) d\tau = 0$$

pour tout $v \in H^1(0,T;E)$. En prenant $v \in H_0^1(0,T;E)$ et en utilisant le fait que $H_0^1(0,T;E)$ est dense dans $L^2(0,T;E)$, nous en déduisons que

$$\dot{x}_R(t) = F(x_R,t), \quad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

Alors

$$[X - x_R(T)] \cdot v(T) + [x_R(0) - x^0] \cdot v(0) = 0$$

pour tout $v \in H^1(0,T;E)$. Donc $X = x_R(T)$ et $x_R(0) = x^0$. ■

Soit $\{t_n \ , n = 0,...,N\}$ tel que $0 = t_0 < ... < t_n < ... < t_N = T$ une partition régulière de l'intervalle $[0,T]$. Cette partition définit N sous intervalles $I_n = [t_{n-1},t_n]$, $n = 1,...,N$, de $[0,T]$ de longueur $h_n = t_n - t_{n-1}$. Le pas d'une partition est défini par $h = \max\{h_n : n = 1,..,N\}$.

Pour chaque $n = 1,...,N$ on pose

$$\mathcal{U}_n = E^{n+1} \times \prod_{k=1}^{n} H^1(I_k;E)$$

et pour $\tilde{u}_n = (U_0,...,U_n; u_1,...,u_n) \in \mathcal{U}_n$ on pose

$$\hat{u}_n(t) = \begin{cases} U_k & \text{si } t = t_k \quad (k = 0,...,n), \\ u_k(t) & \text{si } t \in]t_{k-1},t_k[\quad (k = 1,...,n). \end{cases}$$

On considère alors le problème variationnel local suivant

$$\begin{cases} \text{étant donnés } U_0 = x^0 \text{ et } (u_k,U_k) \in H^1(I_K;E) \times E \text{ déjà déterminés} \\ \text{pour } k = 1,2,....n-1, \text{trouver } (u_n,U_n) \in H^1(I_n;E) \times E \ \text{ tel que} \\ U_n \cdot v_n(t_n) - \int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau = U_{n-1} \cdot v_n(t_{n-1}) + \int_{I_n} F(\hat{u}_n,\tau) \cdot v_n(\tau) d\tau, \\ \text{pour tout } \ v_n \in H^1(I_n;E). \end{cases} \tag{7}$$

Notons que si ce problème a une solution on obtient, comme dans la démonstration du Théorème 3.1, que

$$U_n = u_n(t_n) \text{ et } U_{n-1} = u_n(t_{n-1}).$$

Ainsi, comme les (u_k,U_k) $(k = 1,...,n-1)$ ont été déterminés suivant le même procédé, $\hat{u}_n(.)$ est continue et appartient à $H^1(0,t_n;E)$.

Théorème 3.2 *Les problèmes (6)et (7) sont équivalents.*

Démonstration :Supposons que l'équation (7) a une solution $(u_n, U_n) \in H^1(I_n; E) \times E$. En prenant $v_n \in H_0^1(I_n; E) \subset L^2(I_n; E)$ on en déduit que

$$\dot{u}_n(t) = F(\hat{u}_n, t) \quad \text{p.p. sur } I_n.$$

Aussi $U_n = u_n(t_n)$ et $U_{n-1} = u_n(t_{n-1})$. Posons $x_R = \hat{u}_N \in H^1(0, T; E)$. On en déduit (6) en additionnant (7) pour $n = 1, ..., N$, en posant $X = U_N = \hat{u}_n(T)$ et en observant que $U_0 = x^0$.

Inversement, si (6) a une solution, considérons $v_1 \in H^1(I_1; E)$ et définissons $v \in H^1(0, T; E)$ par

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t) - v_1(t_1), & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & \text{si } t > t_1. \end{cases}$$

En substituant v dans l'équation (6) on obtient

$$-\int_0^{t_1} x_R(\tau) \cdot \dot{v}_1(\tau) d\tau = x^0(v_1(t_0) - v_1(t_1)) + \int_0^{t_1} F(x_R, \tau) \cdot (v_1(\tau) - v_1(t_1)) d\tau.$$

Posons $u_1 = x_R \mid_{I_1}$ et $U_1 = x^0 + \int_0^{t_1} F(u_1, \tau) d\tau$. Ainsi on a

$$U_1 \cdot v_1(t_1) - \int_0^{t_1} u_1(\tau) \cdot \dot{v}_1(\tau) d\tau = x^0 \cdot v_1(t_0) + \int_0^{t_1} F(u_1, \tau) \cdot v_1(\tau) d\tau. \tag{8}$$

pour tout $v_1 \in H^1(I_1; E)$. Aussi, on a de (6)

$$\begin{cases} X.v(T) - \int_0^{t_1} u_1(\tau).\dot{v}(\tau) d\tau - \int_{t_1}^T x_R(\tau) \cdot \dot{v}(\tau) d\tau \\ = x^0.v_1(t_0) + \int_0^{t_1} F(u_1, \tau).v(\tau) d\tau + \int_{t_1}^T F(x_R, \tau).v(\tau) d\tau, \\ \text{pour tout } v \in H^1(0, T; E). \end{cases}$$

En considérant $v \mid_{I_1} = v_1$, on trouve

$$X.v(T) - \int_{t_1}^T x_R(\tau).\dot{v}(\tau) d\tau = U_1.v(t_1) + \int_{t_1}^T F(x_R, \tau).v(\tau) d\tau,$$

pour tout $v \in H^1(t_1, T; E)$. On procède alors de même pour I_n $(n = 2, ..., N)$. ■

On introduit les notations suivantes

$$J_n = \{j \in J : \tau_j \in]t_{n-1}, t_n]\}, \qquad n = 1, ..., N,$$

$$J_n^{\leq} = \{j \in J : \tau_j \in]0, t_n]\}, \qquad n = 1, ..., N$$

et

$$l_\infty(E^J) = \{\xi \in E^J : \| \xi \|_\infty = sup\{|\xi_j| : j \in J\} < +\infty\}.$$

On définit de la même manière $l_\infty(E^{J_n})$ et $l_\infty(E^{J_n^{\leq}})$.

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (7) on utilise les lemmes suivants dont les démonstrations se trouvent dans [8]. Nous supposons que $J = \mathbb{N}^*$, cependant les résultats obtenus restent vrais pour n'importe quel sous-ensemble J de $\mathbb{N}$. Pour simplifier l'écriture on pose $\Lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$. On utilise les notations $\prod_{i=m}^{n} \gamma_i = 1$ si $n < m$ et $\sum_{i=m}^{n} \gamma_i = 0$ si $n < m$.

Lemme 3.1 *Soit $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ une suite de nombres réels positifs. Alors*

$$1+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\prod_{k=1}^{i-1}(1+\lambda_k)\leq e^{\Lambda}.$$

Notons que les fonctions $\theta_j(.)$ sont bien définies sous la seule condition que les valeurs $\{y(\tau_j)\}_{j\in J}$ soient bien définies. Ainsi pour une suite $\xi=\{\xi_j\}_{j\in J}$ on peut définir

$$\begin{array}{l}\theta_1(\xi)=\xi_1,\\ \theta_j(\xi)=\xi_j+\sum\limits_{i<j}\alpha_i\circ\theta_i(\xi)\text{ et}\end{array}$$

avec comme précédemment

$$\beta_j=\alpha_j\circ\theta_j,\quad (j\in J).$$

Lemme 3.2 *Pour tout ξ^1 et ξ^2 dans $l_\infty(E^j)$, on a*

$$\begin{aligned}|\beta_j(\xi^1)-\beta_j(\xi^2)| &\leq \lambda_j e^{\Lambda}\max\{|\xi_k^1-\xi_k^2|:k=1,...,j\}\\ &\leq \lambda_j e^{\Lambda}\|\xi^1-\xi^2\|_\infty.\end{aligned}$$

Remarque 3.1 *Si $x_1,x_2\in C(0,T;E)$ et $\xi_j^k=x_k(\tau_j)$ $(k=1,2)$. Alors*

$$\begin{aligned}|\beta_j(\xi^1)-\beta_j(\xi^2)| &\leq \lambda_j e^{\Lambda}\max\{|x_1(\tau_k)-x_2(\tau_k)|:k=1,...,j\}\\ &\leq \lambda_j e^{\Lambda}\|x_1-x_2\|_\infty.\end{aligned}$$

Lemme 3.3 *On a*

$$\sum_{j\in J}|\beta_j(0)|\leq e^{\Lambda}\sum_{j\in J}|\alpha_j(0)|.$$

Lemme 3.4 *Soit $I=[\alpha,\beta]$.*
(i) L'application

$$\begin{array}{rcl}H^1(I;E) & \longrightarrow & L^2(I;E)\times E\\ v & \longmapsto & (\dot v, v(\beta))\end{array}$$

est un isomorphisme.
(ii) Soit b un élément arbitraire de $H^1(I,E)^*$, le problème variationnel suivant

$$\left\{\begin{array}{l}\text{trouver } (u,U)\in L^2(I;E)\times E \text{ tel que}\\ U.v(\beta)-\int_\alpha^\beta u(t)\cdot\dot v(t)dt=b(v)\\ \text{pour tout } v\in H^1(I;E)\end{array}\right. \tag{9}$$

a une solution unique.

Démonstration :Voir [9]. ■

Théorème 3.3 *Soit $x^0\in E$,*
(a) supposons que $f:E\times[0,T]\longrightarrow E$ vérifie les conditions suivantes :
(i) pour tout $x\in E$, l'application $t\longrightarrow f(x,t)$ est (Lebesgue) mesurable,
(ii) il existe $q\in L^2(0,T;E)$ telle que pour tout $x_1,x_2\in L^2(0,T;E)$

$$| f(x_1(t),t) - f(x_2(t),t) | \leq q(t) | x_1(t) - x_2(t) |,$$

(iii) l'application $t \longrightarrow f(0,t)$ *est dans* $L^2(0,T;E)$ *;*

(b) supposons que les fonctions α_j $(j \in J)$ *vérifient les conditions suivantes :*

(iv) $\sum_{j\in J} |\alpha_j(0)| < +\infty$,

(v) il existe une suite de nombres réels positifs $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ *tel que* $\sum_{j\in J} \lambda_j < +\infty$ *et pour tout* $j \in J$ *et* $x_1, x_2 \in E$

$$| \alpha_j(x_1) - \alpha_j(x_2) | \leq \lambda_j | x_1 - x_2 | .$$

Alors

(1) La solution $(U_1, ..., U_N, u_1, ..., u_N) \in \mathcal{U}_N$ *de (7) existe et est unique. De plus* $x_R = \hat{u}_N$ *est l'unique solution dans* $H^1(0,T;E)$ *du système (5).*

(2) La solution de (1) existe et est unique dans $BV(0,T;E)$*. De plus on a*
$x(t) = \hat{u}_N(t) + \sum_{j\in J} \beta_j(\hat{u}_N)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)$.

Démonstration :Sous les hypothèses du théorème, $f(.,.)$ est une fonction de Carathéodory. Alors pour tout u mesurable et $\xi = \{\xi_j\}_{j\in J}$ l'application

$$t \mapsto u(t) + \sum_{j\in J} \beta_j(\xi)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t)$$

est mesurable et alors

$$t \mapsto f(u(t) + \sum_{j\in J} \beta_j(\xi)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t), t)$$

est mesurable. De plus si $u \in L^2(0,T;E)$ et $\xi = \{\xi_j\}_{j\in J} \in l_\infty(E^J)$, l'application

$$t \mapsto f(u(t) + \sum_{j\in J} \beta_j(\xi)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t), t)$$

est intégrable puisque

$$\begin{aligned}
&\left| f(u(t) + \sum_{j\in J} \beta_j(\xi)\chi_{[t_j,\infty)}(t), t) \right| \\
&\qquad \leq \left| f(u(t) + \sum_{j\in J} \beta_j(\xi)\chi_{[t_j,\infty)}(t), t) - f(0,t) \right| + |f(0,t)|, \\
&\qquad \leq q(t)|u(t) + \sum_{j\in J} \beta_j(\xi)\chi_{[t_j,\infty)}(t)| + |f(0,t)|, \\
&\qquad \leq q(t)\left[|u(t)| + \sum_{j\in J} |\beta_j(\xi) - \beta_j(0) + \beta_j(0)|\, \chi_{[t_j,\infty)}(t) \right] + |f(0,t)|, \\
&\qquad \leq q(t)\left[|u(t)| + \Lambda e^{\Lambda}\|\xi\|_\infty + e^{\Lambda} \sum_{j\in J} |\alpha_j(0)| \right] + |f(0,t)|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left| f(u(t) + \sum_{j\in J} \beta_j(\xi)\chi_{[t_j,\infty)}(t), t) \right| d\tau \\
&\qquad \leq \|q\|_0\|u\|_0 + \|q\|_0 T^{1/2} e^{\Lambda}[\Lambda\|\xi\|_\infty + \sum_{j\in J} |\alpha_j(0)|] + T^{1/2}\|f(0,.)\|_0.
\end{aligned}$$

Ainsi l'application

$$v \longrightarrow b_n(v;u,\xi)\ = U_{n-1}.v(t_{n-1}) + \int_{I_n} f(u(\tau) + \sum_{j\in J_n^{\leq}} \beta_j(\xi)\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau),\tau)\cdot v(\tau)d\tau$$

est bien définie, linéaire et continue sur $H^1(I_n;E)$. Par suite $b_n(.;u,\xi) \in H^1(I_n;E)^*$. Notons que pour $\tau \in I_n$ on a

$$\sum_{j\in J_n^{\leq}} \beta_j(\xi)\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau) = \sum_{j\in J_{n-1}^{\leq}} \beta_j(\xi) + \sum_{j\in J_n} \beta_j(\xi)\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau),$$

la première sommation de droite est une constante lorsque la suite $\{\xi_j\}_{j\in J_{n-1}^{\leq}} \in l_\infty(E^{J_{n-1}^{\leq}})$ est déjà connue.

On considère le problème auxiliaire local (faible) suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ étant donné } U_0 = x^0, (u_k,U_k) \in L^2(I_k,E)\times E\ (k=1,...,n-1) \text{ et } \{\xi_j\}_{j\in J_{n-1}^{\leq}} \in l_\infty(E^{J_{n-1}^{\leq}}), \\ \text{pour } n=1,...,N \text{ déterminer } (u_n,U_n) \in L^2(I_n;E)\times E \text{ et } \{\xi_j\}_{j\in J_n} \in l_\infty(E^{J_n}) \text{ tels que} \\ U_n\cdot v_n(t_n) - \int_{I_n} u_n(\tau)\cdot \dot v_n(\tau)d\tau \\ = U_{n-1}\cdot v_n(t_{n-1}) + \int_{I_n} f(u_n(\tau) + \sum\limits_{j\in J_n^{\leq}} \beta_j(\xi)\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau),\tau)\cdot v_n(\tau)d\tau, \\ \text{ pour tout } \ v_n\in H^1(I_n;E) \ \text{ et} \\ \xi_i = U_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{\tau_i} f(u_n(\tau) + \sum\limits_{j\in J_n^{\leq}} \beta_j(\xi)\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau),\tau)d\tau \\ \text{pour tout } i\in J_n. \end{array}\right. \tag{10}$$

Soit $(u_n^0,U_n^0) \in L^2(I_n;E)\times E$ fixe mais arbitraire et $\xi^0 = \{\xi_j^0\}_{j\in J_n^{\leq}} \in l_\infty(E^{J_n^{\leq}})$ tel que $\{\xi_j^0\}_{j\in J_{n-1}^{\leq}}$ sont donnés sur l'intervalle précédent et $\{\xi_j^0\}_{j\in J_n}$ sont fixes et arbitraires. On construit les suites $\{(u_n^m,U_n^m)\}_{m=0}^\infty$ et $\{\xi^m = \{\xi_j^m\}_{j\in J_n^{\leq}}\}_{m=0}^\infty$ de la manière suivante : supposons connue $(u_n^m,U_n^m) \in L^2(I_n;E)\times E$ et $\xi^m = \{\xi_j^m\}_{j\in J_n^{\leq}} \in l_\infty(E^{J_n^{\leq}})$, $(u_n^{m+1},U_n^{m+1}) \in L^2(I_n;E)\times E$ est la solution du problème

$$U_n^{m+1}.v_n(t_n) - \int_{I_n} u_n^{m+1}(\tau)\cdot \dot v_n(\tau)d\tau = b_n(v_n;u_n^m,\xi^m) \ \text{ pour tout } v_n\in H^1(I_n;E) \tag{11}$$

et $\{\xi_j^{m+1}\}_{j\in J_n}$ est définie par

$$\xi_i^{m+1} = U_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{\tau_i} f(u_n^m(\tau) + \sum_{j\in J} \beta_j(\xi^m)\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau),\tau)d\tau. \tag{12}$$

pour $i\in J_n$ et $\xi_j^{m+1} = \xi_j^m$ pour $j\in J_{n-1}^{\leq}$.

Montrons que les deux suites $\{u_n^m\}_{m=0}^{m=\infty}$ et $\{\xi^m\}_{m=0}^{m=\infty}$ sont de Cauchy respectivement dans $L^2(I_n;E)$ et $l_\infty(E^{J_n^{\leq}})$. On a

$$\begin{aligned} &\mid f(u_n^{m+1}(\tau) + \sum_{j\in J}\beta_j(\xi^{m+1})\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau),\tau) - f(u_n^m(\tau) + \sum_{j\in J}\beta_j(\xi^m)\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau),\tau)\mid \\ &\qquad \leq q(\tau)\left[\mid u_n^{m+1} - u_n^m\mid + \mid \sum_{j\in J}(\beta_j(\xi^{m+1})\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau) - \beta_j(\xi^m))\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau)\mid\right]. \end{aligned}$$

Pour les v_n qui vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} \dot v_n(t) = -\left(u_n^{m+1} - u_n^m\right)(t) \ \ sur \ \ I_n, \\ v_n(t_n) = 0. \end{array}\right.$$

On trouve

$$|v_n(t)| = \int_t^{t_n} \left|(u_n^{m+1} - u_n^m)\right|(\tau)d\tau \leq h_n^{1/2} \left\|u_n^{m+1} - u_n^m\right\|_{0,n}.$$

D'après le Lemme 3.3 et l'équation (11), on montre que

$$\left\|u_n^{m+1} - u_n^m\right\|_{0,n} \leq h_n^{1/2} \|q\|_{0,n} \left[\left\|u_n^m - u_n^{m-1}\right\|_{0,n} + h_n^{1/2}\Lambda e^{\Lambda} \left\|\xi^m - \xi^{m-1}\right\|_{\infty,n}\right].$$

Par la même technique on obtient

$$\left\|\xi^{m+1} - \xi^m\right\|_{\infty,n} \leq \|q\|_{0,n} \left[\left\|u_n^m - u_n^{m-1}\right\|_{0,n} + h_n^{1/2}\Lambda e^{\Lambda} \left\|\xi^m - \xi^{m-1}\right\|_{\infty,n}\right].$$

Pour compléter la preuve on utilise le lemme suivant

Lemme 3.5 *Soient* $\{x_m\}_{m=0}^{m=\infty}$ *et* $\{y_m\}_{m=0}^{m=\infty}$ *deux suites telles que*

$$0 \leq x_{m+1} \leq \alpha y_m + \beta x_m$$

$$0 \leq y_{m+1} \leq r(\alpha y_m + \beta x_m)$$

pour $m = 0, 1, 2, ...$ *avec* $\alpha > 0,\ \beta > 0$. *Alors*

$$x_{m+1} \leq (\alpha r + \beta)^m (\alpha y_0 + \beta x_0)$$

$$y_{m+1} \leq r(\alpha r + \beta)^m (\alpha y_0 + \beta x_0)$$

pour $m = 0, 1, 2, ...$ *et pour* $k \geq 0$.

Démonstration :Voir [6]. ■

Si on applique ce lemme avec $\alpha = \|q\|_{0,n}$, $\beta = \|q\|_{0,n} h_n^{1/2}\Lambda e^{\Lambda}$ et $r = h_n^{1/2}$ on déduit les majorations suivantes

$$\begin{aligned}\left\|\xi^{m+1} - \xi^m\right\|_{\infty,n} &\leq \left(h_n^{1/2} \|q\|_{0,n} + h_n^{1/2} \|q\|_{0,n} \Lambda e^{\Lambda}\right)^{m-1} \\ &\quad \left[\|q\|_{0,n} \left\|u_n^1 - u_n^0\right\|_{0,n} + h_n^{1/2} \|q\|_{0,n} \Lambda e^{\Lambda} \left\|\xi^1 - \xi^0\right\|_{\infty,n}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|u_n^{m+1} - u_n^m\right\|_{0,n} &\leq h_n^{1/2} \left(h_n^{1/2} \|q\|_{0,n} + h_n^{1/2} \|q\|_{0,n} \Lambda e^{\Lambda}\right)^{m-1} \\ &\quad \left[\|q\|_{0,n} \left\|u_n^1 - u_n^0\right\|_{0,n} + h_n^{1/2} \|q\|_{0,n} \Lambda e^{\Lambda} \left\|\xi^1 - \xi^0\right\|_{\infty,n}\right].\end{aligned}$$

Si h_n est suffisamment petit ($h_n^{1/2} \|q\|_{0,n} + h_n^{1/2} \|q\|_{0,n} \Lambda e^{\Lambda} < 1$) les suites $\{u_n^m\}_{m=0}^{\infty}$ et $\{\xi^m\}_{m=0}^{\infty}$ sont de Cauchy dans $L^2(I_n; E)$ et $l_\infty(E^{J_n^{\leq}})$ respectivement. Alors $u_n^m \to u_n$ dans $L^2(0, T; E)$ et $\xi^m \to \xi$ dans $l_\infty(E^{J_n^{\leq}})$. Par continuité on trouve

$$-\int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau = b_n(v_n; u_n, \xi)$$

pour tout $v_n \in H^1(I_n; E)$ tel que $v_n(t_n) = 0$ et

$$\xi_i = U_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{\tau_i} f(u_n(\tau) + \sum_{j \in J_n^{\leq}} \beta_j(\xi)\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau), \tau) d\tau,\ j \in J_n.$$

Si on prend $v_n(t) = V \in E$ dans l'équation (11), on obtient

$$U_n^{m+1}.V = b_n(V; u_n^m, \xi^m)$$

pour tout $V \in E$. Ainsi $\{U_n^m\}_{m=0}^{\infty}$ converge vers un $U_n \in E$ et

$$U_n.V = b_n(V; u_n, \xi)$$

pour tout $V \in E$. Soit $w_n(t) = v_n(t) - v_n(t_n)$ avec $v_n \in H^1(I_n; E)$, alors

$$\begin{aligned} -\int_{I_n} u_n(\tau) \cdot v_n(\tau) d\tau &= b_n(v_n(.) - v_n(t_n); u_n, \xi), \\ &= b_n(v_n; u_n, \xi) - b_n(v_n(t_n); u_n, \xi), \\ &= b_n(v_n; u_n, \xi) - U_n.v_n(t_n). \end{aligned}$$

Alors $(u_n, U_n) \in L^2(I_n; E) \times E$ et $\{\xi_j\}_{j \in J_n} \in l_\infty(E^{J_n})$ est solution de (10). On pose ensuite

$$U_n(t) = U_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t} f(u_n(\tau) + \sum_{j \in J} \beta_j(\xi) \chi_{[\tau_j, \infty)}(\tau), \tau) d\tau,$$

$U_n(.) \in H^1(I_n; E)$ et on a $U_n(\tau_j) = \xi_j$, $(j \in J)$. De plus, si on prend $v_n(t) = 1$ dans (10) on trouve que $U_n(t_n) = U_n$. D'autre part on a

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{t_{n-1}}^{t_n} [U_n(\tau) - u_n(\tau)] \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau \\ &= U_n \cdot v_n(t_n) - U_{n-1} \cdot v_n(t_{n-1}) - \textstyle\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(u_n(\tau) + \sum\limits_{j \in J} \beta_j(\xi) \chi_{[\tau_j, \infty)}(\tau), \tau) \cdot v_n(\tau) d\tau \\ &- \textstyle\int_{t_{n-1}}^{t_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Alors on obtient $U_n(t) = u_n(t)$ *p.p.* sur I_n et donc $u_n \in H^1(I_n; E)$. Enfin l'équation (7) admet une solution unique dans $H^1(0, T; E) \times E$. ■

Définissons les espaces de Hilbert $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ comme suit

$$\mathcal{U} = E^{N+1} \times \prod_{n=1}^{N} H^1(I_n; E) = \mathcal{U}_N,$$

$$\mathcal{V} = E \times \prod_{n=1}^{N} H^1(I_n; E) = \mathcal{V}_N.$$

Dans le but d'appliquer une méthode d'approximation de type Galerkin nous considérons le problème faible global équivalent à ce dernier

$$\begin{cases} \text{trouver } \tilde{u} = (U_0, U_1, ..., U_N; u_1, ..., u_N) \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\ U_0(V_0 - v_1(t_0)) + \sum\limits_{n=1}^{N} U_n(v_n(t_n) - v_{n+1}(t_n)) + U_N \cdot v_N(t_N) - \sum\limits_{n=1}^{N} \int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau \\ = x^0 \cdot V_0 + \sum\limits_{n=1}^{N} [\int_{I_n} F(\hat{u}_n, \tau) \cdot v_n(\tau) d\tau], \\ \text{pour tout } \tilde{v} = (V_0, v_1, ..., v_N) \in \mathcal{V}. \end{cases} \tag{13}$$

4 Approximation de type Galerkin

Nous cherchons une solution $\tilde{u}_h$ dans un sous-espace $\mathcal{U}^h$ de $\mathcal{U}$ dans le cas où les fonctions test $\tilde{v}^h$ sont dans un sous-espace $\mathcal{V}^h$ de $\mathcal{V}$, où les espaces $\mathcal{U}^h$ et $\mathcal{V}^h$ sont de dimensions finies et on utilisera pour nos approximations des fonctions polynômiales par morceaux. Définissons les sous-espaces $\mathcal{U}^h$ et $\mathcal{V}^h$ de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ par

$$\mathcal{U}^h = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u}_h = (U_0, U_1, .., U_N; u_1, ..., u_N) \in \mathcal{U} \\ \text{tel que } u_n \in \mathcal{P}^K(I_n; E) \text{ pour } n = 1, ...N \end{array} \right\}, \tag{14}$$

$$\mathcal{V}^h = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{v}^h = (V_0, v_1, v_2, ..., v_N) \in \mathcal{V} \\ \text{tel que } v_n \in \mathcal{P}^{K+1}(I_n; E); \text{ pour } \quad n = 1, ..., N \end{array} \right\}. \tag{15}$$

Notons que

$$dim\mathcal{V}^h = dim\mathcal{U}^h = (1 + (k+2)N)dimE.$$

On pose pour chaque $n = 1, ..., N$

$$\mathcal{U}_n^h = E^{n+1} \times \prod_{k=1}^{n} \mathcal{P}^{K+1}(I_k, E)$$

tel que pour chaque $\tilde{u}_n = (U_0, ..., U_n; u_1, ..., u_n) \in \mathcal{U}_n^h$ on a

$$\hat{u}_n(t) = \left\{ \begin{array}{ll} U_k & \text{si } t = t_k \quad (k = 0, ..., n), \\ u_k(t) & \text{si } t \in]t_{k-1}, t_k[\quad (k = 1, ..., n). \end{array} \right. \tag{16}$$

On cherche maintenant á approcher la solution du problème (13) par la solution du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \tilde{u}^h = (U_0, ..., U_N; u_1, ..., u_N) \in \mathcal{U}^h \text{ tel que} \\ U_0 = x^0 \text{ et pour } n = 1, ..., N \\ U_n \cdot v_n(t_n) - \int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau = U_{n-1} \cdot v_n(t_{n-1}) + \int_{I_n} F(\hat{u}_n, \tau) \cdot v_n(\tau) d\tau, \\ \text{pour tout } \ v_n \in \mathcal{P}^{K+1}(I_n; E). \end{array} \right. \tag{17}$$

Nous allons montrer que (17) admet une solution unique pour h assez petit.

Les analogues du Lemme 3.4 et du Théorème 3.3 sont les suivants.

Lemme 4.1 *Soit $I_n = [t_{n-1}, t_n]$.*
(i) L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{K+1}(I_n; E) & \longrightarrow & \mathcal{P}^K(I_n; E) \times E \\ v & \longmapsto & (-\dot{v}, v(t_n)) \end{array}$$

est un isomorphisme.
(ii) Soit b un élément arbitraire de $\mathcal{P}^{K+1}(I_n; E)^*$, le problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{trouver } (u, U) \in \mathcal{P}^K(I_n; E) \times E \textit{ tel que} \\ U.v(t_n) - \int_{I_n} u(t).\dot{v}(t) dt = b(v) \quad \forall v \in \mathcal{P}^{K+1}(I_n; E), \end{array} \right.$$

a une solution unique.

Théorème 4.1 *Si les hypothèses du Théorème 3.3 sont vérifiées alors le problème variationnel (17) a une solution unique.*

Démonstration :Posons $U_0 = x^0$. Sur chaque intervalle I_n on suppose que (u_k, U_k), $k = 1, ..., n-1$, sont donnés et il faut trouver $(u_n, U_n) \in \mathcal{P}^K(I_n; E) \times E$ tel que

$$\begin{cases} U_n \cdot v_n(t_n) - \int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau = U_{n-1} \cdot v_n(t_{n-1}) + \int_{I_n} F(\hat{u}_n, \tau) \cdot v_n(\tau) d\tau \\ \text{pour tout } \; v_n \in \mathcal{P}^{K+1}(I_n; E). \end{cases}$$

Pour tout $u_n \in \mathcal{P}^K(I_n; E)$ l'application

$$v \longrightarrow b_n(v; u_n) \; = U_{n-1}.v(t_{n-1}) + \int_{I_n} F(\hat{u}_n, \tau) \cdot v(\tau) d\tau$$

est bien définie, linéaire et continue sur $\mathcal{P}^K(I_n; E)$. Ainsi $b_n(.; u_n) \in \mathcal{P}^{K+1}(I_n; E)^*$.

Soit $(u_n^0, U_n^0) \in \mathcal{P}^K(I_n; E) \times E$ arbitraire fixe. On construit la suite $\{(u_n^m, U_n^m)\}_{m=0}^\infty$ de la manière suivante : supposons connue $(u_n^m, U_n^m) \in \mathcal{P}^K(I_n; E) \times E$, $(u_n^{m+1}, U_n^{m+1}) \in \mathcal{P}^K(I_n; E) \times E$ est la solution du problème

$$U_n^{m+1}.v_n(t_n) - \int_{I_n} u_n^{m+1}(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau = b_n(v_n; u_n^m), \tag{18}$$

pour tout $v_n \in \mathcal{P}^{K+1}(I_n; E)$. Montrons que la suite $\{u_n^m\}_{m=0}^{m=\infty}$ est de Cauchy dans $\mathcal{P}^K(I_n; E)$. On a

$$\begin{aligned} &\mid F(\hat{u}_n^{m+1}, \tau) - F(\hat{u}_n^m, \tau) \mid \\ &\quad \leq q(\tau) \left[\mid u_n^{m+1}(\tau) - u_n^m(\tau) \mid + \mid \sum_{j \in J} (\beta_j(\hat{u}_n^{m+1}) \chi_{[\tau_j, \infty)}(\tau) - \beta_j(\hat{u}_n^m) \chi_{[\tau_j, \infty)}(\tau) \mid \right]. \end{aligned}$$

Pour les v_n qui vérifient

$$\begin{cases} \dot{v}_n(t) = -\left(u_n^{m+1} - u_n^m\right)(t) \;\; sur \;\; I_n, \\ v_n(t_n) = 0. \end{cases}$$

On trouve

$$|v_n(t)| = \int_t^{t_n} \left|(u_n^{m+1} - u_n^m)(\tau)\right| d\tau \leq h_n^{1/2} \left\|u_n^{m+1} - u_n^m\right\|_{0,n}.$$

D'après le Lemme 4.1 et en utilisant l'équation (18), on montre que

$$\left\|u_n^{m+1} - u_n^m\right\|_{0,n} \leq h_n^{1/2} \left\|q\right\|_{0,n} \left[\left\|u_n^m - u_n^{m-1}\right\|_{0,n} + h_n^{1/2} \Lambda e^\Lambda \left\|\zeta^m - \zeta^{m-1}\right\|_{\infty,n}\right]$$

avec $\zeta^j = u_n(\tau_j), j \in J_n$, et $\left\|\zeta^m - \zeta^{m-1}\right\|_{\infty,n} = sup\{|u_n^m(\tau_j) - u_n^{m-1}(\tau_j)|; j \in J_n^{\leq}\}$. Pour $j \in J_{n-1}^{\leq}$ on a $\hat{u}_n^m(\tau_j) = \hat{u}_n^{m-1}(\tau_j)$ car les u_k, $k = 1, ..., n-1$, sont fixes. En utilisant les inégalités suivantes (voir Delfour et Dubeau [3])

$$\left\|\zeta^m - \zeta^{m-1}\right\|_{\infty,n} \leq h_n^{-1/2} [\left\|\zeta^m - \zeta^{m-1}\right\|_{0,n} + h_n \left\|\zeta^m - \zeta^{m-1}\right\|_{1,n}]$$

$$\left\|\zeta^m - \zeta^{m-1}\right\|_{1,n} \leq c h_n^{-1} \left\|\zeta^m - \zeta^{m-1}\right\|_{0,n},$$

on trouve

$$\left\|u_n^{m+1} - u_n^m\right\|_{0,n} \leq c h_n^{1/2} \left\|q\right\|_{0,n} \left\|u_n^m - u_n^{m-1}\right\|_{0,n}.$$

Si h_n est suffisamment petit, la suite $\{u_n^m\}_{m=0}^\infty$ est de Cauchy dans $\mathcal{P}^K(I_n; E)$. Alors $u_n^m \to u_n$ dans $\mathcal{P}^K(I_n; E)$. Par continuité on trouve

$$\begin{cases} -\int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau = b_n(v_n; u_n) \;\; \text{pour tout } v_n \in H^1(I_n; E), \\ \text{tel que } v_n(t_n) = 0. \end{cases}$$

Si on prend $v_n(t) = V \in E$ sur I_n dans l'équation (18) on obtient $U_n^{m+1}.V = b_n(V; u_n^m)$ pour tout V dans E. Donc $\{U_n^m\}_{m=0}^{\infty}$ converge vers $U_n \in E$ et $U_n.V = b_n(V; u_n)$ pour tout $V \in E$. Soit $w_n(t) = v_n(t) - v_n(t_n)$ avec $v_n(t) \in H^1(I_n; E)$. On a

$$-\int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{w}_n(\tau) d\tau = b_n(w_n; u_n)$$

car $w_n(t_n) = 0$ et on obtient

$$\begin{aligned} -\int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau &= b_n(v_n; u_n) - b_n(v_n(t_n); u_n) \\ &= b_n(v_n; u_n) - U_n.v_n(t_n). \end{aligned}$$

D'où (u_n, U_n) est une solution de l'équation (17) sur l'intervalle I_n. ■

5 L'erreur L^2 et aux noeuds

5.1 Résultats de convergence

Théorème 5.1 *Soit $x \in H^{K+1}(0, T; E)$ alors*

$$Inf\{\|x - \overline{u}_n\|_{0,n} : \overline{u}_n \in \mathcal{P}^K(I_n; E)\} \leq ch^{k+1}\|x^{K+1}\|_{0,n}, \tag{19}$$

$$Inf\{\|x - \overline{u}^h\|_0 : \overline{u}^h|_{I_n} = \overline{u}_n \in \mathcal{P}^K(I_n; E)\} \leq ch^{k+1}\|x^{K+1}\|_0. \tag{20}$$

Posons $e_{0,n} = \|u_n - x_R\|_{0,n}$, $e_0 = \|u_n - x_R\|_0$, $\overline{e}_{0,n} = \|\overline{u}_n - x_R\|_{0,n}$, $E_n = |U_n - x_R(t_n)|$, $e_{1,n} = \|u_n - x_R\|_{1,n}$, $\overline{e}_{1,n} = \|\overline{u}_n - x_R\|_{1,n}$, $e_{\infty,n} = sup\{|u_n(\tau_j) - x_R(\tau_j)| : j \in J_n\}$ et $e_{\infty,n\leq} = sup\{|\hat{u}_n(\tau_j) - x_R(\tau_j)| : j \in J_{n\leq}\}$ avec $\overline{u}_n \in \mathcal{P}^K(I_n; E)$.

Théorème 5.2 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si h est assez petit,*

$$\|\hat{u}_N - x_R(t)\|_0 < c\ h^1 \left\|x_R^{(1)}\right\|_0, \tag{21}$$

$$\max\{|U_n - x_R(t_n)|\,; n = 0, 1, .., N\} \leq ch^1 \left\|x_R^{(1)}\right\|_0, \tag{22}$$

où $\hat{u}_N = \sum_{n=1}^{N} u_n \chi_{[t_{n-1}, t_n]}$.

Démonstration :On va faire un raisonnement de proche en proche. On suppose que $E_k = |U_k - x_R(t_k)| = O(h)$, $k = 1, ..., n-1$, $\|u - x_R\|_{0,[0,t_{n-1}]} = O(h)$ (i.e. $\|u - x_R\|_{0,[0,t_{n-1}]} \leq ch$) et regardons ce qui se passe sur l'intervalle $I_n = [t_{n-1}, t_n]$.

Des problèmes suivants

$$\begin{cases} \text{trouver } x_n \in H^1(I_n; E), \text{ avec } x_1, ..., x_{n-1} \text{ déjà donnés et } x_n = x_R|_{I_n}, \text{ tel que} \\ x_R(t_n) \cdot v_n(t_n) - \int_{I_n} x_R(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau = x_R(t_{n-1}) \cdot v_n(t_{n-1}) + \int_{I_n} F(x_R, \tau) \cdot v_n(\tau) d\tau, \\ \text{pour tout } v_n \in H^1(I_n; E) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \text{trouver } u_n \in H^1(I_n; E) \text{ avec } u_1, ..., u_{n-1} \text{ déjà donnés, tel que} \\ U_n \cdot v_n(t_n) - \int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau = U_{n-1} \cdot v_n(t_{n-1}) + \int_{I_n} F(\hat{u}_n, \tau) \cdot v_n(\tau) d\tau, \\ \text{pour tout } v_n \in H^1(I_n; E), \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{array}{c}[U_n - x_R(t_n)]\cdot v_n(t_n) - \int_{I_n}(u_n(\tau)-x_R(\tau))\cdot \dot v_n(\tau)d\tau = [U_{n-1}-x_R(t_{n-1})]\cdot v_n(t_{n-1})\\ + \int_{I_n}[F(\hat u_n,\tau)-F(x_R,\tau)]\cdot v_n(\tau)d\tau.\end{array}\tag{23}$$

Prenons $v_n = U_n - x_R(t_n)$ dans cette équation alors on a

$$\begin{array}{c}|U_n - x_R(t_n)|^2 \le |U_{n-1}-x_R(t_{n-1})||U_n - x_R(t_n)|\\ +|U_n - x_R(t_n)|\int_{I_n}|F(\hat u_n,\tau)-F(x_R,\tau)|d\tau,\end{array}$$

par suite

$$|U_n - x_R(t_n)| \le |U_{n-1}-x_R(t_{n-1})| + \int_{I_n}|F(\hat u_n,\tau)-F(x_R,\tau)|d\tau.$$

De plus on a

$$\begin{array}{l}\int_{I_n}|F(\hat u_n,\tau)-F(x_R,\tau)|d\tau\\ \le \int_{I_n} q(\tau)\left|(u_n(\tau)-x_R(\tau)) + \sum\limits_{j\in J}((\beta_j(\hat u_n)-\beta_j(x_R))\chi_{[\tau_j,\infty)}(\tau)\right| d\tau,\\ \le \|q\|_{0,n}\|u_n - x_R\|_{0,n} + \Lambda e^{\Lambda} h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}\|\hat u_n - x_R\|_{\infty,n\le}.\end{array}\tag{24}$$

Alors on obtient la majoration suivante

$$\begin{array}{rcl}E_n &\le& E_{n-1} + \|q\|_{0,n}e_{0,n} + \Lambda_n e^{\Lambda_n}\|q\|_{0,n}h_n^{1/2}\max\{|\hat u_n(\tau_j)-x_R(\tau_j)| : j\in J_n^{\le}\},\\ &\le& E_{n-1} + \|q\|_{0,n}e_{0,n} + \Lambda_n e^{\Lambda_n}\|q\|_{0,n}h_n^{1/2}(e_{\infty,n-1\le} + e_{\infty,n}).\end{array}$$

Or $e_{\infty,n} \le h_n^{-1/2}[e_{0,n} + h_n e_{1,n}]$, voir [3], d'où

$$E_n \le E_{n-1} + (1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})\|q\|_{0,n}e_{0,n} + \Lambda_n e^{\Lambda_n}h_n^1 e_{1,n}\|q\|_{0,n} + \Lambda_n e^{\Lambda_n}\|q\|_{0,n}h^{1/2}e_{\infty,n-1\le}.$$

De plus $e_{1,n} \le \|u_n - \overline{u}_n\|_{1,n} + \overline{e}_{1,n}$ et $\|u_n - \overline{u}_n\|_{1,n} \le c h_n^{-1}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}$. Donc on obtient

$$E_n \le E_{n-1} + (1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})\|q\|_{0,n}e_{0,n} + \Lambda_n e^{\Lambda_n}h_n^1\{c h_n^{-1}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} + \overline{e}_{1,n} + h^{-1/2}e_{\infty,n-1\le}\}\|q\|_{0,n}.\tag{25}$$

Prenons v_n tel que $\dot v_n(\tau) = -(u_n - \overline{u}_n)(\tau), t\in I_n$ et $v_n(t_n) = 0$ dans l'équation (23)

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_{I_n}|u_n(\tau)-\overline{u}_n(\tau)|^2 d\tau &\le& \displaystyle\int_{I_n}|\overline{u}_n(\tau)-x_R(\tau))||u_n(\tau)-\overline{u}_n(\tau)|d\tau + E_{n-1}\int_{I_n}|u_n(\tau)-\overline{u}_n(\tau)|d\tau\\ && \displaystyle + h^{1/2}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}\int_{I_n}|F(\hat u_n,\tau)-F(x_R(\tau),\tau)|d\tau.\end{array}$$

Alors en utilisant (24) on trouve

$$\begin{array}{c}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}^2 \le \|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}\|\overline{u}_n - x_R\|_{0,n} + h^{1/2}E_{n-1}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}\\ +h^{1/2}\|q\|_{0,n}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}\left[\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} + \|\overline{u}_n - x_R\|_{0,n} + \Lambda_n e^{\Lambda_n}h^{1/2}(e_{\infty,n-1\le} + e_{\infty,n})\right],\end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} &\le& \overline{e}_{0,n} + E_{n-1}h_n^{1/2} + h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}e_{0,n} + h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}(e_{\infty,n-1\le} + e_{\infty,n}),\\ &\le& \overline{e}_{0,n} + E_{n-1}h_n^{1/2} + h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}\{\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} + \overline{e}_{0,n}\}\\ && + h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}(e_{0,n} + h_n e_{1,n})h_n^{-1/2} + h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}e_{\infty,n\le},\\ &\le& \overline{e}_{0,n} + E_{n-1}h_n^{1/2} + h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}\{\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} + \overline{e}_{0,n}\}\\ && + h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}h_n^{-1/2}[e_{0,n} + c\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} + h_n\overline{e}_{1,n}] + h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}e_{\infty,n-1\le}.\end{array}$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
[1 - h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}(1+(1+c)\Lambda_n e^{\Lambda_n})]\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} \quad &\leq \quad E_{n-1}h_n^{1/2} + \overline{e}_{0,n}[1 + h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})] \\
&+ \quad h_n^{3/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\overline{e}_{1,n} + h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{\infty,n-1\leq}.
\end{aligned}
$$

Posons $\theta_n = h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}(1+(1+c)\Lambda_n e^{\Lambda_n})$ alors l'équation précédente devient

$$
\begin{aligned}
\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} \quad &\leq \quad \frac{1}{1-\theta_n}\Big\{E_{n-1}h_n^{1/2} + \overline{e}_{0,n}(1+\theta_n) \\
&+ \quad h_n^{3/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{1,n} + h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{\infty,n-1\leq}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Enfin on a la majoration suivante

$$
\begin{aligned}
\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} \quad &\leq \quad \frac{1}{1-\theta_n}\Big\{h_n^{1/2}E_{n-1} + (1+\theta_n)\overline{e}_{0,n} + h_n^{3/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\overline{e}_{1,n}\Big\} \\
&+ \quad \frac{1}{1-\theta_n}h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{\infty,n-1\leq}. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

En utilisant cette inégalité pour la majoration de l'erreur dans $L^2(0,T;E)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
e_{0,n} \quad &\leq \quad \overline{e}_{0,n} + \|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}, \\
&\leq \quad \overline{e}_{0,n} + \frac{1}{1-\theta_n}\Big[h_n^{1/2}E_{n-1} + (1+\theta_n)\overline{e}_{0,n} + h_n^{3/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\overline{e}_{1,n}\Big] \\
&\quad\quad + \frac{1}{1-\theta_n}h_n^1\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{\infty,n-1\leq}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
e_{0,n} \leq \frac{1}{1-\theta_n}\Big[h_n^{1/2}E_{n-1} + 2\overline{e}_{0,n} + h_n^{3/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\overline{e}_{1,n} + h_n^1\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{\infty,n-1\leq}\Big]. \qquad (27)
$$

De même pour la majoration de l'erreur aux noeuds, on utilise l'équation (26), alors l'équation (25) devient

$$
\begin{aligned}
E_n \quad &\leq \quad E_{n-1} + \|q\|_{0,n}(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})\left[\overline{e}_{0,n} + \|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}\right] + \Lambda_n e^{\Lambda_n}\|q\|_{0,n}\left[h_n\overline{e}_{1,n} + c\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}\right] \\
&\quad\quad + \|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} h_n^{1/2} e_{\infty,n-1\leq}, \\
&\leq \quad E_{n-1} + \|q\|_{0,n}(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})\overline{e}_{0,n} + h_n\Lambda_n e^{\Lambda_n}\|q\|_{0,n}\overline{e}_{1,n} \\
&\quad\quad + \frac{\|q\|_{0,n}(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n}) + c\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}}{1-\theta_n}\Big[h_n^{1/2}E_{n-1} + (1+\theta_n)\overline{e}_{0,n} + h_n^{3/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\overline{e}_{1,n}\Big] \\
&\quad\quad + \|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} h^{1/2} e_{\infty,n-1\leq} + \frac{c'}{1-\theta_n}\|q\|_{0,n}(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{\infty,n-1\leq}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
E_n \quad &\leq \quad \frac{1 + \|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} h^{1/2}}{1-\theta_n}E_{n-1} \\
&\quad\quad + \overline{e}_{0,n}\left[(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})\|q\|_{0,n} + \frac{1+\theta_n}{1-\theta_n}(\|q\|_{0,n}(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n}) + \|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n})\right] \\
&\quad\quad + \overline{e}_{1,n}\left[h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} + h_n^{3/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\frac{\|q\|_{0,n}(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n}) + c\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}}{1-\theta_n}\right] \\
&\quad\quad + \Lambda_n e^{\Lambda_n} h_n^{1/2}\|q\|_{0,n} e_{\infty,n-1\leq}\left[1 + \frac{c'}{1-\theta_n}(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}\right].
\end{aligned}
$$

Pour h suffisamment petit, le coefficient de $e_{\infty,n-1\leq}$ peut être réarrangé et majoré comme suit

$$\begin{aligned}\Lambda_n e^{\Lambda_n} h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}\left[1+\frac{c'}{1-\theta_n}(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}\right] &\leq \Lambda_n e^{\Lambda_n} h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}(1+\frac{c'}{1-\theta_n}\theta_n),\\ &\leq \frac{c'\theta_n}{1-\theta_n}.\end{aligned}$$

Le coefficient de $\overline{e}_{0,n}$ est égal à

$$\begin{aligned}&\frac{(1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})\|q\|_{0,n}}{1-\theta_n}\left\{(1-\theta_n)+(1+\theta_n)+c(1+\theta_n)\frac{\Lambda_n e^{\Lambda_n}}{1+\Lambda_n e^{\Lambda_n}}\right\}\\ &\leq (1+\Lambda_n e^{\Lambda_n})\|q\|_{0,n}\frac{(3+\theta_n)}{1-\theta_n}.\end{aligned}$$

Le coefficient de $\overline{e}_{1,n}$ est majoré par

$$\begin{aligned}&\frac{h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}}{1-\theta_n}\left[1-\theta_n+\theta_n h_n^{1/2}+ch_n^{1/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\right]\\ &\leq \frac{h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}}{1-\theta_n}\left[1+ch_n^{1/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\right].\end{aligned}$$

Donc on trouve

$$\begin{aligned}E_n &\leq \frac{1+\theta_n}{1-\theta_n}E_{n-1}+\frac{\|q\|_{0,n}[1+\Lambda_n e^{\Lambda_n}c]}{1-\theta_n}(3+\theta_n)\overline{e}_{0,n}+\frac{c'\theta_n}{1-\theta_n}e_{\infty,n-1\leq}\\ &\quad+\frac{1}{1-\theta_n}\left\{h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}(1+\|q\|_{0,n}h_n^{1/2}\Lambda_n e^{\Lambda_n}c)\right\}\overline{e}_{1,n}.\end{aligned}$$

Si on prend $\alpha_n=\frac{1+\theta_n}{1-\theta_n}$, $\beta_n=\frac{\|q\|_{0,n}[1+\Lambda_n e^{\Lambda_n}c]}{1-\theta_n}(3+\theta_n)$, $\gamma_n=\frac{1}{1-\theta_n}\{h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}(1+\|q\|_{0,n}h_n^{1/2}\Lambda_n e^{\Lambda_n}c)\}$ et $\delta_n=\frac{c'\theta_n}{1-\theta_n}$, on trouve

$$E_n\leq\alpha_n E_{n-1}+\beta_n\overline{e}_{0,n}+\gamma_n\overline{e}_{1,n}+\delta_n e_{\infty,n-1\leq}.$$

De proche en proche on montre que

$$\begin{aligned}E_n &\leq (\prod_{i=1}^{n}\alpha_i)E_0+\sum_{j=0}^{n}(\prod_{i=1}^{j-1}\alpha_{n-i})\beta_{n-j}\overline{e}_{0,n-j}+\sum_{j=0}^{n}(\prod_{i=1}^{j-1}\alpha_{n-i})\gamma_{n-j}\overline{e}_{1,n-j}\\ &\quad+\sum_{j=0}^{n}(\prod_{i=1}^{j-1}\alpha_{n-i})\delta_{n-j}e_{\infty,n-j\leq}\end{aligned}$$

avec la convention $\prod\limits_{k=m}^{n}\alpha_k=1$ si $n<m$. Donc

$$E_n \leq KE_0+K\sum_{j=0}^{n}\beta_{n-j}\overline{e}_{0,n-j}+K\sum_{j=0}^{n}\gamma_{n-j}\overline{e}_{1,n-j}+K\sum_{j=0}^{n}\delta_{n-j}e_{\infty,n-j\leq},$$

où K est défini comme suit $\alpha_n=\frac{1+\theta_n}{1-\theta_n}=1+\frac{2\theta_n}{1-\theta_n}$, $K=\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\frac{2\theta_i}{1-\theta_i})\leq e^{2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\theta_i}{1-\theta_i}}$. Si h est assez petit de telle sorte que $\theta_l<1/2$ pour tout l de l'ensemble $\{1,...,N\}$, alors $1-\theta_i>1/2$ d'où $\frac{\theta_i}{1-\theta_i}\leq 2\theta_i$. Donc $K\leq e^{4\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i}<\infty$. On a également

$$\sum_{j=0}^{n}\beta_{n-j}\overline{e}_{0,n-j} \leq (\sum_{j=0}^{n}\beta_{n-j}^2)^{1/2}\overline{e}_0$$

où $\overline{e}_0 = (\sum_{j=0}^{n} \overline{e}_{0,n-j}^2)^{1/2}$. De même si on prend $\overline{e}_1 = (\sum_{j=0}^{n} \overline{e}_{1,n-j}^2)^{1/2}$ on trouve

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_{n-j}\overline{e}_{1,n-j} \quad \leq \quad (\sum_{j=0}^{n} \gamma_{n-j}^2)^{1/2}\overline{e}_1.$$

On montre que

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{n-j}^2 \quad = \quad \sum_{m=0}^{n} \beta_m^2 \leq \max\{\frac{(3+\theta_l)^2}{(1-\theta_l)^2}, 0 \leq l \leq n\} \sum_{m=0}^{n} \|q\|_{0,m}^2 (1+\Lambda_m e^{\Lambda_m} c)^2.$$

Si h est suffisamment petit pour que $\theta_i \leq 1/2$, on aura

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{n-j}^2 \quad \leq \quad c(1+\Lambda e^{\Lambda} c)^2 \|q\|_0^2.$$

Puisque $1 + h_n^{1/2}\Lambda_n e^{\Lambda_n} c\|q\|_{0,n} \leq 1 + \theta_n$ donc $\gamma_n \leq h_n \frac{1}{1-\theta_n}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}(1+\theta_n)$, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_{n-j}^2 \leq c\|q\|_{0,m}^2 (\Lambda e^{\Lambda} c)^2 h^2.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \delta_{n-j} \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n} \delta_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{c'\theta_k}{1-\theta_k}, \\
&\leq \quad 2c' \sum_{k=0}^{n} \theta_k, \\
&\leq \quad 2hc'\|q\|_0 (1 + c\Lambda e^{\Lambda}).
\end{aligned}$$

Finalement

$$E_n \quad \leq \quad KE_0 + Kc(1+\Lambda e^{\Lambda} c)\|q\|_0 \overline{e}_0 + c\|q\|_0 (\Lambda e^{\Lambda} c) h^1 \overline{e}_1 + K2c'\|q\|_0 h^1 (1 + c\Lambda e^{\Lambda}) e_{\infty,n-j\leq}.$$

On a $e_{\infty,n} \leq h_n^{1/2}[e_{0,n} + h_n e_{1,n}]$ de plus

$$\begin{aligned}
e_{1,n} \quad &\leq \quad \overline{e}_{1,n} + \|u_n - \overline{u}_n\|_{1,n}, \\
&\leq \quad \overline{e}_{1,n} + ch_n^{-1}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
e_{\infty,n} \quad &\leq \quad h_n^{-1/2} e_{0,n} + h_n^{1/2}\overline{e}_{1,n} + ch_n^{-1/2}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}, \\
&\leq \quad h_n^{-1/2}\overline{e}_{0,n} + h^{-1/2}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n} + h_n^{-1/2}\overline{e}_{0,n} + ch_n^{-1/2}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}, \\
&\leq \quad 2h_n^{-1/2}\overline{e}_{0,n} + (1+c)h^{-1/2}\|u_n - \overline{u}_n\|_{0,n}, \\
&\leq \quad 2h_n^{-1/2}\overline{e}_{0,n} + h^{-1/2}\frac{(1+c)}{1-\theta_n}\{h_n^{1/2}E_{n-1} + (1+\theta_n)\overline{e}_{0,n} + h_n^{3/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\overline{e}_{1,n} \\
&+ \quad h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{\infty,n-1\leq}\}, \\
&\leq \quad O(h^{1/2}) + cE_{n-1} + O(h^1) + O(h^{3/2}) + \frac{1}{1-\theta_n} h_n^{1/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{\infty,n-1\leq}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} e_{0,n} &\leq \frac{1}{1-\theta_n}[h^{1/2}E_{n-1} + 2\overline{e}_{0,n} + h_n^{3/2}\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}\overline{e}_{1,n} \\ &\quad +h_n\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n} e_{\infty,n-1\leq}] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} e_0 &\leq C[\max_n E_n + 2\overline{e}_0 + h^{3/2}\max\{\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}; n=1,...,N\}e_1 \\ &\quad +h_n^{1/2}\max\{\|q\|_{0,n}\Lambda_n e^{\Lambda_n}, n=1,...,N\}e_{\infty,n-1\leq}]. \end{aligned}$$

Revenons au raisonnement par récurrence. Pour $n=1$ on a $E_0 = U_0 - x^0 = 0$ alors $E_1 \cong O(h)$, donc le résultat est vrai pour E_1 et $e_{0,1}$. Supposons qu'il soit vrai jusqu'a $n-1$ et montrons qu'il est vrai pour n. Puisque $E_1 \cong O(h)$ et $e_{0,1} = O(h)$ alors $e_{\infty,1} \leq O(h^{1/2})$; et par suite $e_{\infty,2} \leq O(h^{1/2})$. Enfin $e_{\infty,l} \cong O(h^{1/2})$ pour tout $l \leq n$ alors

$$E_n \leq C(E_0 + O(h^1) + O(h^{3/2})),$$

$$e_0 \leq [E_0 + O(h_n) + O(h^{3/2})].$$

$\blacksquare$

Théorème 5.3 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si h est assez petit, on a*

$$\left\|\hat{u}_N + \sum_{j\in J}\beta_j(\hat{u}_N)\chi_{[\tau_j,\infty)} - x\right\|_0 \leq ch^1\left\|x_R^{(1)}\right\|_0, \tag{28}$$

$$\max\left\{\left|U_n + \sum_{j\in J}\beta_j(\hat{u}_N)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t_n) - x(t_n)\right|; n=0,1,..,N\right\} \leq ch^1\left\|x_R^{(1)}\right\|_0 \tag{29}$$

où x est la solution de (1).

Démonstration :On a $x(t) = x_R(t) + \sum_{j\in J}\beta_j(x_R)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t_n)$ alors

$$\begin{aligned} &\left\|\hat{u}_N + \sum_{j\in J}\beta_j(\hat{u}_N)\chi_{[\tau_j,\infty)} - x\right\|_0 \\ &\qquad \leq \|\hat{u}_N - x_R\|_0 + \left\|\sum_{j\in J}[\beta_j(\hat{u}_N) - \beta_j(x_R)]\chi_{[\tau_j,\infty)}\right\|_0. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la norme $\|.\|_0$, on trouve

$$\begin{aligned} &\left\|\sum_{j\in J}[\beta_j(\hat{u}_N) - \beta_j(x_R)]\chi_{[\tau_j,\infty)}\right\|_0 \\ &\qquad = \left\{\sum_{n=1}^{N}\left\|\sum_{j\in J_n}[\beta_j(\hat{u}_N) - \beta_j(x_R)]\chi_{[\tau_j,\infty)}\right\|_{0,n}^2\right\}^{1/2}, \\ &\qquad \leq \left\{\sum_{n=1}^{N}\left\|\sum_{j\in J_n}\lambda_j e^{\Lambda}\max\{|\hat{u}_N(\tau_i) - x_R(\tau_j)|, i\in J_n\}\right\|_{0,n}^2\right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\leq e^{\Lambda} e_{\infty,N\leq} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \| \sum_{j \in J_n} \lambda_j \|_{0,n}^2 \right\}^{1/2},$$
$$\leq h^{1/2} \{ \sum_{n=1}^{N} (\sum_{j \in J_n} \lambda_j)^2 \}^{1/2} e^{\Lambda} e_{\infty,N\leq},$$
$$\leq h^{1/2} \Lambda e^{\Lambda} e_{\infty,N\leq}.$$

En utilisant les résultats du théorème précédent on trouve l'inégalé (28). Pour obtenir la majoration (29) on suit le même procédé.

■

5.2 Résultats de superconvergence pour les systèmes non linéaires

Dans ce paragraphe on suppose que les impulsions ne dépendent pas de l'état c'est à dire que $\alpha_j(x(\tau_j^-)) = \alpha_j$. Dans ce cas on aura $\beta_j(x_R) = \alpha_j$ pour tout $j \in J$, de plus l'hypotèse (b) du Théorème 3.3 devient $\sum_{j \in J} |\alpha_j| < \infty$. Avec cette condition l'équation (17) devient

$$\begin{cases} \text{ trouver } \tilde{u}^h = (U_0, ..., U_N; u_1, ..., u_N) \in \mathcal{U}^h \text{ tel que} \\ U_0 = x^0 \text{ et pour } n = 1, ..., N \\ U_n \cdot v_n(t_n) - \int_{I_n} u_n(\tau) \cdot \dot{v}_n(\tau) d\tau \\ \quad = U_{n-1} \cdot v_n(t_{n-1}) + \int_{I_n} f(u_n(\tau) + \sum_{j \in J} \alpha_j \chi_{[\tau_j, \infty)}(\tau), \tau) \cdot v_n(\tau) d\tau, \\ \text{pour tout } \ v_n \in \mathcal{P}^{K+1}(I_n; E). \end{cases} \tag{30}$$

Pour les systèmes non linéaires nous utilisons les résultats de Théorème 5.2 pour prouver que si la fonction F vérifie des hypothèses supplémentaires alors on peut obtenir des ordres de convergence plus élevés.

Théorème 5.4 *Si $A \in L^2(0, T; L(E))$ et $f \in L^2(0, T; E)$ alors l'unique solution w du système*

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A(t) w(t) + f(t), \\ w(0) = \alpha \end{cases}$$

est dans $H^1(0, T; E)$, l'application $(x^0, f) \mapsto w$ de $E \times L^2(0, T; E)$ dans $H^1(0, T; E)$ est linéaire continue et il existe une constante c tel que

$$\|w\|_1 \leq c\{|\alpha| + \|f\|_0\}.$$

Démonstration :Voir [4]. ■

Lemme 5.1 *Soit x une fonction définie sur $[0, T]$ à valeur dans E, sur chaque sous-intervalle I_n on désigne son interpolation de Lagrange de degré 0 par x_n^I. Si $x \in H^1$, nous avons*

$$\|x_n^I - x\|_{0,n} \leq ch^1 \|x^1\|_{0,n} \leq ch^1 \|x\|_{1,n}$$

et

$$\|x^I - x\|_0 \leq ch^1 \|x^1\|_0 \leq ch^1 \|x\|_1.$$

Démonstration :Voir [1]. ■

Théorème 5.5 *Supposons que la solution du problème (5) est dans $H^1(0,T;E)$, que la solution de (13) existe et que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) la matrice $A(t) = F_x(x(t),t)$, $a_{ij}(t) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x(t),t)$, $1 \leq i,j \leq d$ avec $d = dimE$, est dans $H^1(0,T;E)$,

(ii) il existe un voisinage V de l'origine de E et une constante $B \geq 0$ tels que pour tout $t \in [0,T]$ et $y \in x_R(t) + V$

$$|F(y,t) - F(x_R(t),t) - A(t)(y - x_R(t))| \leq B|y - x_R(t)|^2.$$

Alors il existe une constante c indépendante de h telle que lorsque h est suffisamment petit

$$\max\{|U_n - x_R(t_n)| : n = 0,1,..,N\} \leq c\,\|u - x_R\|_0\,[h^1 + \|u - x_R\|_0], \tag{31}$$

$$\max\left\{\left|U_n + \sum_{j\in J}\alpha_j\chi_{[\tau_j,\infty)}(t_n) - x(t_n)\right| : n = 0,1,..,N\right\} \leq c\,\|u - x_R\|_0\,[h^1 + \|u - x_R\|_0]. \tag{32}$$

Démonstration :Prenons $v = (v_1, v_2, ..., v_N) \in \prod_{n=1}^{N} \mathcal{P}^1(I_n;E)$ tel que $v_n(t_n) = v_{n+1}(t_n)$ pour $n = 1,...,N-1$ dans (13) et en additionnant cette dernière pour les n premiers intervalles nous obtenons

$$(x_R(t_n) - U_n)\cdot v_n(t_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_R - u_i, \dot{v}_i)_{0,i} + \sum_{i=1}^{n}(F(x_R) - F(u_i), v_i)_{0,i}. \tag{33}$$

Soit w la solution de l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{w}(t) + A^T(t)w(t) = 0, \\ w(t_n) = x(t_n) - U_n. \end{cases} \tag{34}$$

D'après (i) et le Théorème 5.4 w est dans $H^1(0,t_n;E)$. Si w^I est l'interpolée continue de w dans $\prod_{n=1}^{N} \mathcal{P}^1(I_n;E)$ avec $w^I(t_n) = x(t_n) - U_n$, le Lemme 5.1 et le Théorème 5.4 nous donnent

$$\|w - w^I\|_1 \leq ch^1\|w\|_0 \leq ch^1|x(t_n) - U_n|. \tag{35}$$

Substituant w^I à la place de v dans (33), on trouve

$$|x_R(t_n) - U_n|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_R - u_i, \dot{w}_i^I + A^T w_i^I)_{0,i} + \sum_{i=1}^{n}(F(x_R) - F(u_i) - A(x_R - u_i), w_i^I)_{0,i}.$$

Par construction de w et l'hypothèse (ii), cette équation devient

$$|x_R(t_n) - U_n|^2 = \|x_R - u\|_0\|w_i^I + A^T w_i^I\|_0 + B\|x_R - u\|_0^2\|w^I\|_\infty. \tag{36}$$

On a $\|w^I\|_\infty \leq \|w\|_\infty + \|w - w^I\|_\infty$ et d'après (35) on trouve

$$\|w - w^I\|_\infty \leq cT^{-1/2}\|\dot{w} - \dot{w}^I\|_0. \leq ch^1|x_R(t_n) - U_n|,$$

d'où $\|w^I\|_\infty \leq c|x(t_n) - U_n|$ si h est suffisamment petit. Egalement

$$\|\dot{w}^I + A^T w\|_0 \leq \|\dot{w}^I - \dot{w}\|_0 + \|A^T(w^I - w)\|_0 \leq c\|w^I - w\|_1 \leq chE_n.$$

En utilisant ces inégalités dans (36) nous obtenons

$$|x_R(t_n) - U_n| = c\|x_R - u\|_0[h + \|x_R - u\|_0]$$

et grâce à (2.32) on obtient $|x(t_n) - U_n| = ch^2\|x^{(1)}\|_0[1 + \|x^{(1)}\|_0]$ d'où le résultat. ∎

5.3 Résultats de superconvergence dans le cas linéaire

Dans ce paragraphe on suppose que $f(x(t),t) = A(t)x(t) + b(t)$ où $A(t)$ est une matrice de dimension $d \times d$ dont les éléments sont mesurables et bornés sur $[0,T]$ alors si $\sum_{j \in J} |\alpha_j| < \infty$ on a l'existence et l'unicité de la solution du problème (13) dans $H^1(0,T;E)$.

Lemme 5.2 *Soit $w \in H^{K+2}(I_n;E)$ telle que*

$$\begin{cases} \dot{w}(t) + A^T w(t) = 0, \\ w(t_n^-) = E_n. \end{cases}$$

alors

$$\left\| w^{(l)} \right\|_{\infty,n} \leq c\,|E_n| \quad (l = 1, ..., K+1), \tag{37}$$

$$\left\| w^{(l)} \right\|_{0,n} \leq ch^{1/2}\,|E_n| \quad (l = 0, ..., K+2). \tag{38}$$

De plus soit $v \in \mathcal{P}^K(I_n;E)$ telle que

$$v(t) = E_n - \int_{I_n} P_K(\dot{w})(\tau) d\tau,$$

alors

$$\|v\|_{\infty,n} \leq (1 + ch)\,|E_n|\,, \tag{39}$$

$$\|v - w\|_{\infty,n} \leq ch^{K+2}\,|E_n|\,, \tag{40}$$

$$\|v - w\|_{0,n} \leq ch^{K+5/2}\,|E_n|\,, \tag{41}$$

$$\|\dot{v} - \dot{w}\|_{0,n} \leq ch^{K+3/2}\,|E_n|\,. \tag{42}$$

Démonstration :Voir [2], Lemme 5.7. ■

Lemme 5.3 *L'inégalité suivante est vérifiée*

$$\prod_{n=1}^{N} (1 + ch_n^{1/2}\,\|q\|_{0,n}) \leq exp(cT^{1/2}\,\|q\|_0). \tag{43}$$

Démonstration :Voir [2], Lemme 5.4. ■

Théorème 5.6 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3 et si les impulsions ne dépendent pas de l'état, alors pour h assez petit et tout $\overline{u}_n \in \mathcal{P}^{k+1}(I_n;E)$ on a*

$$|U_n - x_R(t_n)| \leq \left[1 + ch_n^{1/2}\,\|q\|_{0,n}\right] |U_{n-1} - x_R(t_{n-1})| + c\,\|q\|_{0,n}\,\|\overline{u}_n - x_R\|_{0,n}\,, \tag{44}$$

$$\|u_n - x_R\|_{0,n} \leq ch_n^{1/2}\,|U_{n-1} - x_R(t_{n-1})| + c\,\|\overline{u}_n - x_R\|_{0,n}\,. \tag{45}$$

Démonstration :Voir [3], Théorème 4.10. ■

Remarque 5.1 *Lorsque les éléments de A sont dans $H^1(0,T;E)$, alors ils sont continus et bornés, donc q est bornée et pour tout intervalle I_n, $\|q\|_{0,n}$ est proportionnelle à $h^{1/2}$.*

Théorème 5.7 *Supposons que*

$$f(x(t),t) = A(t)x(t) + b(t)$$

où $b(t)$ et les colonnes de $A(t)$ sont mesurables et dans $H^{K+1}(0,T;E)$ et que $\sum_{j\in J} |\alpha_j| < \infty$. Alors pour h assez petit on a

$$|U_n - x_R(t_n)| \leq (1+ch)\left[|U_{n-1} - x_R(t_{n-1})| + ch^{K+3/2}\left\|u_n - x_R\right\|_{0,n}\right].$$

Démonstration :De l'équation (23) avec $\phi_j(u_n(\tau_1),...,u_n(\tau_j)) = \alpha_j$ $(j \in J)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\left[U_n - x_R(t_n)\right].v_n(t_n) &= \left[U_{n-1} - x_R(t_{n-1})\right].v_n(t_n) + \int_{I_n} (u_n(\tau) - x_R(\tau)).\dot{v}(\tau)d\tau \\
&\quad + \int_{I_n} (A(\tau)\left[u_n(\tau) - x_R(\tau)\right].v_n(\tau)d\tau \\
&= \left[U_{n-1} - x_R(t_{n-1})\right].v_n(t_n) \\
&\quad + \int_{I_n} (u_n(\tau) - x_R(\tau)).\left[\dot{v}(\tau) + A^T(\tau)v_n(\tau)\right]d\tau.
\end{aligned}$$

Utilisons v_n définie dans le lemme (5.2), avec $E_n = U_n - x(t_n)$ alors on onbtient

$$\left[U_{n-1} - x_R(t_{n-1})\right].v_n(t_{n-1}) \leq \|v\|_{\infty,n}\left|U_{n-1} - x_R(t_{n-1})\right|$$

et d'après l'équation (39)

$$\left[U_{n-1} - x_R(t_{n-1})\right].v_n(t_{n-1}) \leq (1+ch)\left|U_{n-1} - x_R(t_{n-1})\right|\left|E_n\right|.$$

De l'inégalité de schwartz on déduit

$$\int_{I_n} (u_n(\tau) - x_R(\tau))\left[\dot{v}(\tau) + A^T(\tau)v_n(\tau)\right]d\tau \leq \|u_n - x_R\|_{0,n}\left\|\dot{v} + A^T v_n\right\|_{0,n}.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\left\|\dot{v} + A^T v_n\right\|_{0,n} &= \left\|\dot{v}_n - \dot{w} + A^T(v_n - w)\right\|_{0,n} \text{ } w \text{ définie dans le lemme (5.2)} \\
&\leq max(1, \left\|A^T\right\|_\infty)(\|\dot{v}_n - \dot{w}\|_{0,n} + \|v_n - w\|_{0,n}) \\
&\leq max(1, \left\|A^T\right\|_\infty)(ch^{K+3/2} + ch^{K+5/2})\left|E_n\right| \text{ d'aprés (41) et (42)} \\
&\leq ch^{K+3/2}(1+ch)\left|E_n\right|.
\end{aligned}$$

D'où

$$|U_{n-1} - x_R(t_{n-1})| \leq (1+ch)\left[|U_{n-1} - x_R(t_{n-1})| + ch^{K+3/2}\left\|u_n - x_R\right\|\right]_{0,n}.$$

∎

Théorème 5.8 *Sous les hypothèses du Théorème 5.7 on a le résultat suivant*

$$|U_n - x_R(t_n)| \leq c\left\{\left|U_0 - x^0\right| + h^{K+2}\left\|x_R^{(1)}\right\|_0 \sum_{j\in J}|\alpha_j|\right\}.$$

Démonstration :Du Théorème 5.7 on a

$$|U_n - x_R(t_n)| \le (1 + ch)\left[|U_{n-1} - x_R(t_{n-1})| + ch^{K+3/2}\left\|u_n - x_R\right\|_{0,n}\right]$$

et du Théorème (5.6)

$$|U_n - x_R(t_n)| \le (1 + ch)\left[|U_{n-1} - x_R(t_{n-1})|\,(1 + ch^{K+2}) + ch^{K+3/2}\left\|\overline{u}_n - x_R\right\|_{0,n}\right].$$

De Lemme (5.3) on trouve

$$|U_n - x_R(t_n)| \le (1 + ch)\left[\left|U_0 - x^0\right| + \sum_{i=1}^{n} ch^{K+3/2}\left\|\overline{u}_i - x_R\right\|_{0,i}\right]$$

puisque la solution de (7) est dans $H^1(0,T;E)$. Du Théorème 5.1 on obtient le résultat. ■

6 Forme générale de la solution du problème approché

Dans ce paragraphe on suppose que $E = \mathbb{R}$ et on écrit $\mathcal{P}^K(I_n)$ et $\mathcal{P}^K(0,1)$ au lieu de $\mathcal{P}^K(I_n;E)$ et $\mathcal{P}^K(0,1;E)$. Nous allons choisir des bases pour $\mathcal{P}^K(0,1)$ et $\mathcal{P}^{K+1}(0,1)$ et en déduire des bases pour $\mathcal{P}^K(I_n)$ et $\mathcal{P}^{K+1}(I_n)$, $n = 1,..,N$. Pour celà choisissons une formule d'intégration numérique à $(k+1)$ points

$$\int_0^1 \psi\left(\zeta\right)d\zeta = \sum_{k=1}^{K+1} a_k \psi(\eta_k), \tag{46}$$

où $0 \le \eta_1 \le ... \le \eta_l \le \eta_{l+1} \le ... \le \eta_{K+1} \le 1$, qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur où égal à $(2K+1)$. Soit $\{\varphi_k : k = 1,..,K+1\}$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux $K+1$ points $\{\eta_k\}_{k=1}^{K+1}$

$$\varphi_k(\zeta) = \prod_{i=1, i\neq k}^{K+1} \frac{\zeta - \eta_i}{\eta_k - \eta_i}, \qquad 0 \le \zeta \le 1, \quad k = 1,...,K+1. \tag{47}$$

les polynômes $\varphi_1, ..., \varphi_{K+1}$, forment une base de $\mathcal{P}^K(0,1)$. On définit

$$\begin{cases} \psi_k(t) = \int_t^1 \varphi_k(\zeta)d\zeta \;\; 0 \le t \le 1, & k = 1,..,K+1, \\ \psi_0(t) = 1 \qquad 0 \le t \le 1. \end{cases} \tag{48}$$

Alors $\psi_0, ..., \psi_{K+1}$ forment une base de $\mathcal{P}^{K+1}(0,1)$. Pour obtenir une base de $\mathcal{P}^K(I_n)$ et $\mathcal{P}^{K+1}(I_n)$, où $\mathrm{I}_n = [t_{n-1}, t_n]$, on pose pour $t \in I_n$

$$\varphi_{nk}(t) = \varphi_k(\frac{t - t_{n-1}}{h_n}), \quad k = 1,...,K+1, \tag{49}$$

$$\psi_{nk}(t) = \psi_k(\frac{t - t_{n-1}}{h_n}), \quad k = 0,...,K+1. \tag{50}$$

La famille $\{\varphi_{nk}\}_{k=1}^{K+1}$ forme une base de $\mathcal{P}^K(I_n)$, donc pour tout $u_n \in \mathcal{P}^K(I_n)$ on a

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{K+1} u_{nk}\varphi_{nk}(t) \qquad t \in I_n, \tag{51}$$

avec $u_{nk}=u_n(t_{nk})$, $t_{nk}=t_{n-1}+h_n\eta_k$ et $k=1,...,K+1$. Si on prend $v_n(t)=\psi_{n0}(t)=1$ pour tout $t\in I_n$ dans (17) on obtient

$$U_n=U_{n-1}+\int_{I_n} f(u_n(t)+\sum_{j\in J}\beta_j(\hat{u}_n)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t),t))dt. \tag{52}$$

Pour $v_n=\psi_{nk}$, $k=1,...,K+1$ (17) devient

$$\begin{aligned}U_n\psi_{nk}(t_n)-\int_{I_n} u_n\dot{\psi}_{nk}(t)dt &= U_{n-1}\psi_{nk}(t_{n-1})\\ &+\int_{I_n} f(u_n(t) + \sum_{j\in J}\beta_j(\hat{u}_n)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t),t)\psi_{nk}(t)dt.\end{aligned}$$

Or

$$\psi_{nk}(t_n)=\psi_k(1)=0,$$

$$\psi_{nk}(t_{n-1}) = \psi_k(0)=\int_0^1\varphi_k(\zeta)d\zeta=\sum_{l=1}^{K+1}a_l\varphi_k(\eta_l)=a_k$$

et

$$\begin{aligned}\int_{I_n} u_n(t)\dot{\psi}_{nk}(t)dt &= \sum_{j=1}^{K+1}u_{nj}\int_{I_n}\varphi_{nk}(t)\left(-\frac{1}{h_n}\dot{\psi}_{nk}(\frac{t-t_{n-1}}{h_n})\right)dt,\\ &= -\sum_{j=1}^{K+1}u_{nj}\int_0^1\varphi_j(\zeta)\varphi_k(\zeta)d\zeta \ \text{ où } \zeta=\frac{t-t_{n-1}}{h_n},\\ &= -\sum_{j=1}^{K+1}u_{nj}\sum_{i=1}^{K+1}a_j\varphi_j(\eta_i)\varphi_k(\eta_i),\\ &= u_{nk}a_k.\end{aligned}$$

D'où pour $k=1,..,K+1$ on a

$$u_{nk}a_k=U_{n-1}a_k+\int_{I_n} f(u_n(t)+\sum_{j\in J_n}\beta_j(\hat{u}_n)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t),t)\psi_{nk}(t)dt$$

et donc

$$u_{nk}=U_{n-1}+\frac{1}{a_k}\int_{I_n} f(u_n(t)+\sum_{j\in J_{n\leq}}\beta_j(\hat{u}_n)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t),t)\psi_{nk}(t)dt, \tag{53}$$

pour $k=1,..,K+1$, avec $u_n(\tau_j)=\sum_{k=1}^{K+1}u_{nk}\varphi(\tau_j)$.

Nous avons alors les résultats suivants.

Théorème 6.1 *L'équation (7) est équivalente à $U_0=x^0$ et pour $n=1,...,N$*

$$u_n(t)=U_{n-1}+\sum_{k=1}^{K+1}\frac{\varphi_{nk}(t)}{a_k}\int_{I_n} f(u_n(t)+\sum_{j\in J_{n\leq}}\beta_j(\hat{u}_n)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t),t)\psi_{nk}(t)dt$$

et

$$U_n=U_{n-1}+\int_{I_n} f(u_n(t)+\sum_{j\in J}\beta_j(\hat{u}_n)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t),t)dt,$$

où $\hat{u}_n$ est la fonction définie par (16).

Corollaire 6.1 *On suppose que l'intégrale qui contient le terme non linéaire f est évaluée par la formule d'intégration (46) qui est exacte pour les polynômes de degré inférieur où égal à $2K+1$, alors l'équation (7) nous donne le système*

$$U_0 = x^0,$$

$$u_{nk} = U_{n-1} + \frac{h_n}{a_k}\sum_{l=1}^{K+1} a_l f(u_{nl} + \sum_{j\in J_{n\leq}} \beta_j(\hat{u}_n)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t_{nl}), t_{nl})\psi_k(\eta_l),$$

$$U_n = U_{n-1} + h_n\sum_{l=1}^{K+1} a_l f(u_{nl} + \sum_{j\in J_{n\leq}} \beta_j(\hat{u}_n)\chi_{[\tau_j,\infty)}(t_{nl}), t_{nl}).$$

pour $k = 1,...,K+1$ et $n = 1,...,N$, avec $u_n(\tau_j) = \sum_{k=1}^{K+1} u_{nk}\varphi(\tau_j)$ et $\hat{u}_n$ est la fonction définie par (16).

7 Tests numériques

Pour justifier numériquement nos résultats de convergence nous considérons deux exemples. Dans le premier exemple, nous prenons l'équation différentielle linéaire suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2tx(t), & t \in [0,1], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Dans le deuxième exemple nous prenons l'équation différentielle non linéaire suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2tx^2(t), & t \in [0,1], \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Notons que dans le deuxième exemple les hypothèses du Théorème 5.5 sont satisfaites avec B=2. Pour les figures 1 et 2 nous considérons le premier exemple avec une seule impulsion qui dépend de l'état au point 0.5 avec $\alpha_1(x(0.5^-)) = x(0.5^-)$. Nous considérons dans la suite deux cas pour les deux exemples. Dans le premier cas nous supposons que nous avons 1000 impulsions aux points $\tau_i = \frac{7i\sqrt{(2)}}{10^4}$ et $\alpha_i = (-1)^{i+1}$. Pour le deuxième cas nous supposons que nous avons un point d'accumulation au point $1/3$, avec

$$\tau_i = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{i+1}} \text{ et } \alpha_i = \frac{1000}{2^i}.$$

Pour chaque cas nous calculons le logarithme de l'erreur dans $L^2(0,T)$ ($ln(eL2)$) et le logarithme de l'erreur aux noeuds ($ln(eN)$) en fonction du logarithme de pas de la partition $ln(h)$.

Références

[1] P.G. Ciarlet, *"The Finite Element Method for Elliptic Problems"*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[2] M.C. Delfour et F. Dubeau, "Fixed mesh Approximation of Ordinary Differential Equations with Impulses", *Numer. Math.*, 78 (1998), 377-401.

[3] M.C. Delfour et F. Dubeau, "Discontinous Polynomial Approximations in the Theory of One-Step, Hybrid and Multistep Methods for Nonlineair Ordinary Differential Equations", *Math. Comp.*, 47 (1986), 169-189 et s1-s8.

[4] M. Delfour, W. Hager et F. Trochu, "Discontinous Galerkin Methods for Ordinary Differential Equations", *Math. Comp.*, 36 (1981), 455-473.

[5] F. Dubeau, *"Approximation polynômiale par morceaux des équations différentielles"*, Thèse de Ph.D., Université de Montréal, Février 1981.

[6] F. Dubeau, "Existence, Uniqueness and Approximation of the Solution of an ODE with (Infinitely Many) State-Dependent Impulses via a Fixed Mesh Galerkin Formulation", *Approx. Theory and its Appl.*, 15 (1999), 55-73.

[7] F. Dubeau, "On First Order Ordinary Differential Equations with Infinitely Many State-Dependent Impulses", *Differential Equations and Dynamical Systems*, 5 (1997), 85-89.

[8] F. Dubeau, A. Ouansafi et A. Sakat, "Équations différentielles ordinaires avec impulsions qui dépendent de l'état", à paraître dans les *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, (2001).

[9] J.L. Lions et E. Magenes, *"Problèmes aux limites non homogènes et application"*, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

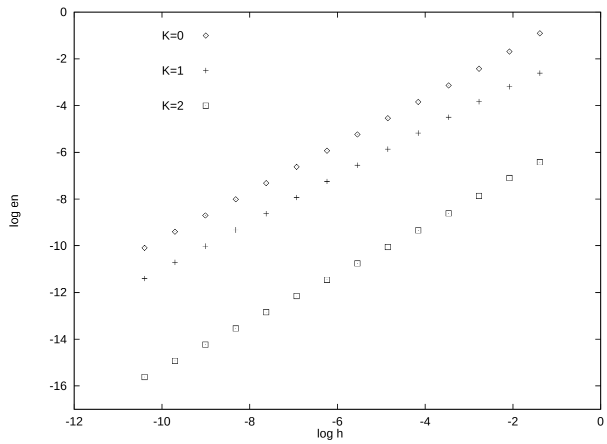

FIG. 1 – L'erreur aux noeuds pour une seule impulsion qui dépend de l'état

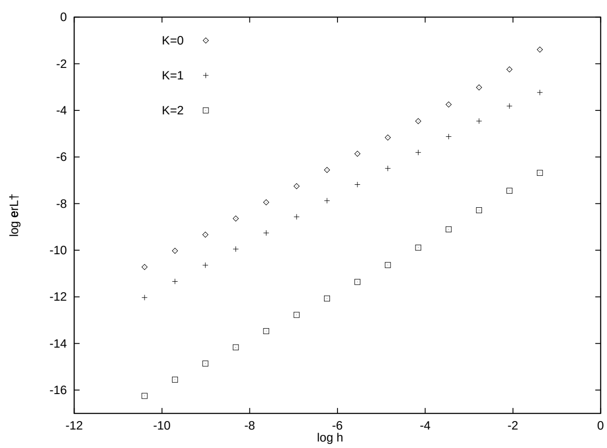

FIG. 2 – L'erreur L^2 pour une seule impulsion qui dépend de l'état

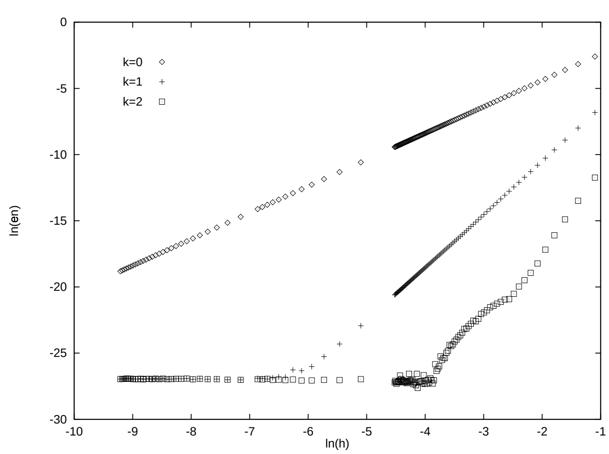

FIG. 3 – L'erreur aux noeuds pour l'exemple 1 avec 1000 impulsions

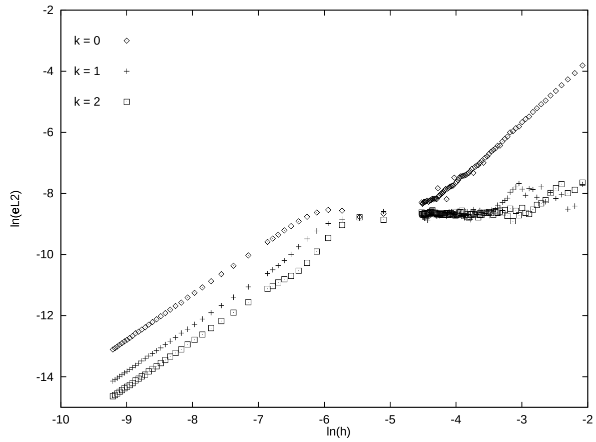

Fig. 4 – L'erreur L^2 pour l'exemple 1 avec 1000 impulsions

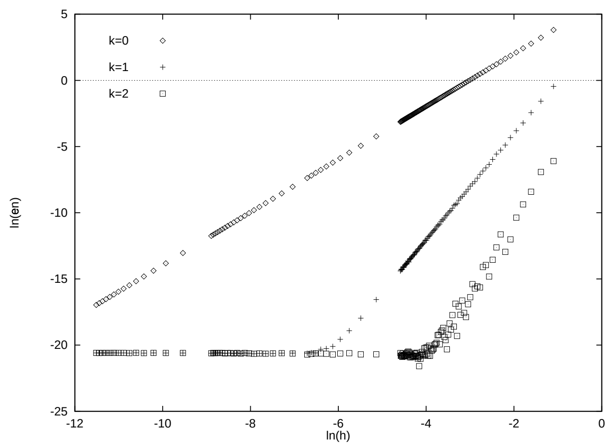

Fig. 5 – L'erreur aux noeuds pour l'exemple 1 avec une infinité d'impulsions

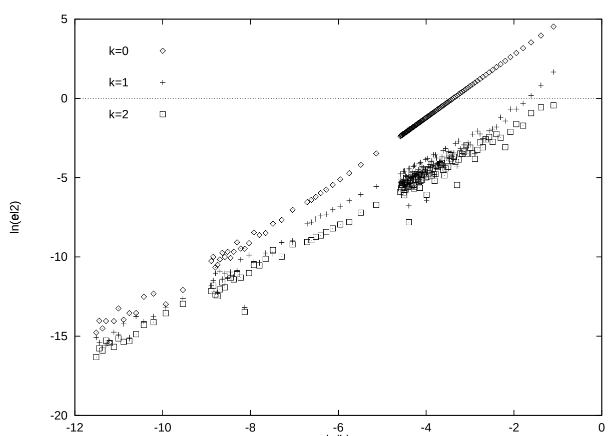

Fig. 6 – L'erreur L^2 pour l'exemple 1 avec une infinité d'impulsions

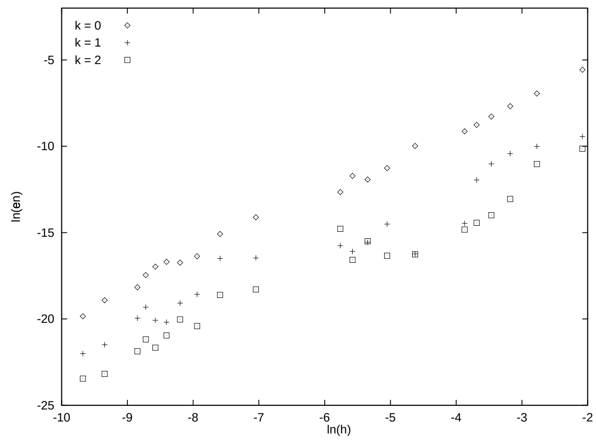

FIG. 7 – L'erreur aux noeuds pour l'exemple 2 avec 1000 impulsions

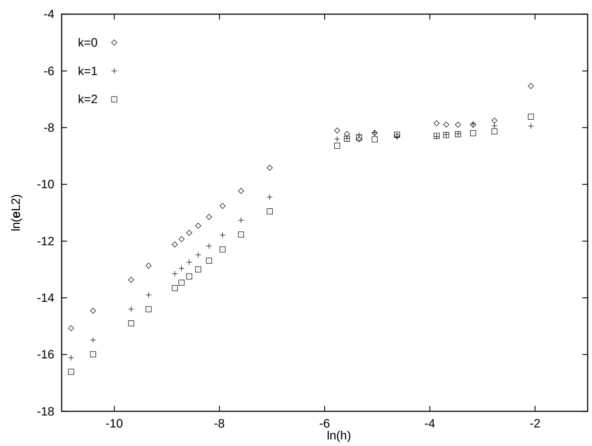

FIG. 8 – L'erreur L^2 pour l'exemple 2 avec 1000 impulsions

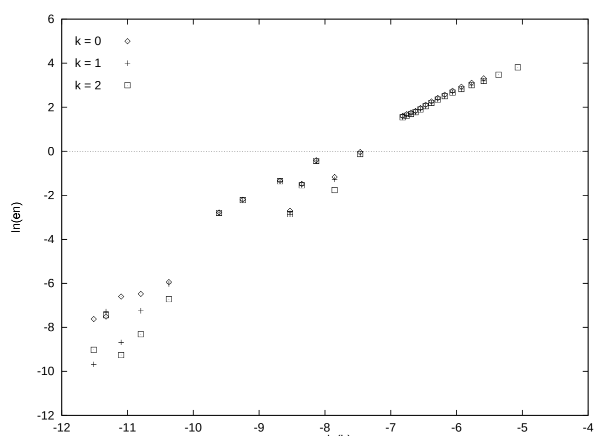

FIG. 9 – L'erreur aux noeuds pour l'exemple 2 avec une infinité d'impulsions

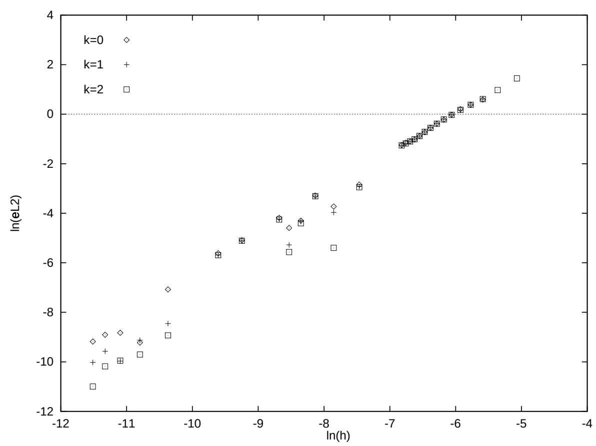

FIG. 10 – L'erreur L^2 pour l'exemple 2 avec une infinité d'impulsions