Pierre ILLE
Institut de Mathématiques de Luminy, CNRS - UMR 6206,
163, avenue de Luminy, Case 907,
13288 Marseille Cedex 9, France

L'intervalle en théorie des graphes

Généralement, pour décomposer une structure mathématique définie sur un ensemble E, on recherche une partition P de E qui soit *compatible* avec cette structure, c'est-à-dire, la valeur de la structure ne dépend pas du choix d'un élément à l'intérieur d'une partie de E qui appartient à P. Cette compatibilité permet alors par contraction, par projection, ou encore par décomposition, de définir le *quotient* de la structure par P.

Concernant des structures combinatoires aussi simples que les graphes, le passage au quotient s'explicite facilement par la notion d'intervalle. Rappelons qu'un *graphe* G se compose d'un ensemble fini S de *sommets* et d'une famille A de paires de sommets, appelées *arêtes*. Par exemple, étant donné un ensemble S, le graphe $(S, \emptyset)$ est le graphe *vide* défini sur S tandis que $(S, \binom{S}{2})$ est le graphe *complet*. Soit un graphe $G = (S, A)$, une partie X de S est un *intervalle* (ou un *clan* ou une partie *homogène* ou un *module*) de G lorsque pour tous $x, y \in X$ et $u \in S - X$, on a : $\{u, x\} \in A$ si et seulement si $\{u, y\} \in A$. Il en résulte que si X et Y sont des intervalles disjoints de G alors ou bien pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, $\{x, y\} \in A$ ou bien pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, $\{x, y\} \notin A$. Ainsi, les partitions compatibles avec G sont les partitions de S constituées d'intervalles de G, qui sont appelées partitions *intervallaires* de G. Les éléments d'une partition intervallaire P de G peuvent donc être considérés comme les sommets d'un nouveau graphe, le *quotient* de G par P, noté G/P et défini sur P de la façon suivante : considérons des éléments distincts X et Y de P, $\{X, Y\}$ est une arête de G/P si $\{x, y\} \in A$, où $x \in X$ et $y \in Y$.

Un graphe possède plusieurs partitions intervallaires. Par exemple, chaque partition d'un ensemble S réalise une partition intervallaire du graphe vide défini sur S. Par contre, il existe des graphes $G = (S, A)$ dont les seules partitions intervallaires sont $\{S\}$ et $\{\{x\}; x \in S\}$. De tels graphes sont appelés *indécomposables* car ils admettent seulement deux quotients : l'un réduit à un sommet, l'autre isomorphe au graphe initial.

Le problème de décomposition uniforme est de spécifier, pour chaque graphe, une partition intervallaire et de caractériser le quotient correspondant. En renforçant la notion d'intervalle, Gallai (1967) est parvenu à associer intrinsèquement à chaque graphe une partition intervallaire qui induit un quotient complet, vide ou indécomposable. L'*arbre de décomposition* d'un graphe s'obtient alors en réitérant cette décomposition. Il permet de caractériser des classes importantes de graphes.

Suite à ce théorème de décomposition, la difficulté réside dans l'étude structurelle des graphes indécomposables. Les premiers résultats conséquents datent du début des années quatre-vingt-dix. Certains permettent de décrire simplement les algorithmes récents de reconnaissance des graphes indécomposables.