Exercices
Ecole Combinatoire
et mécanique statistique

xavier viennot

Val Morin, Québec, Février 2007

opérations sur les objets combinatoires et les séries algébriques et rationelles

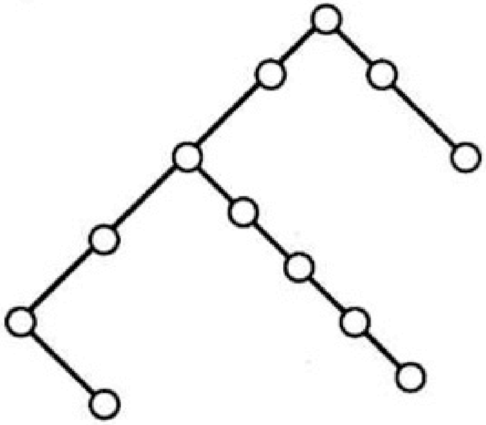
Enumération d'arbres

On considère les arbres binaires ayant les deux propriétés suivantes:

- (i) les sommets ayant deux fils sont sur la branche gauche issue de la racine
- (ii) si un sommet non situé sur la branche gauche issue de la racine a un seul fils, alors ce fils est fils à droite.

Calculer la série génératrice ordinaire énumérant ces arbres selon le nombre de sommets

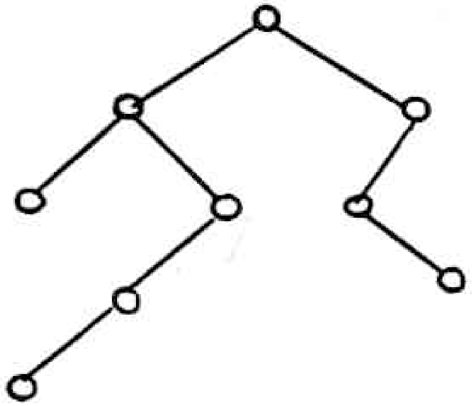
exemple:



Soit b_n le nombre d'arbres binaires ayant n sommets et vérifiant la propriété suivante

(*) si un sommet x a un fils à droite y, alors y n'a pas de fils à droite.

exemple:



a) Donner une équation algébrique satisfaite par la série génératrice

$$g(t) = \sum_{n \geq 0} b_n t^n$$

b) Comparer la série génératrice g(t) avec celle des nombres de Motzkin M_n. Donner une bijection entre les arbres vérifiant (*) et les mots de Motzkin.

Arbres d'ordre 2

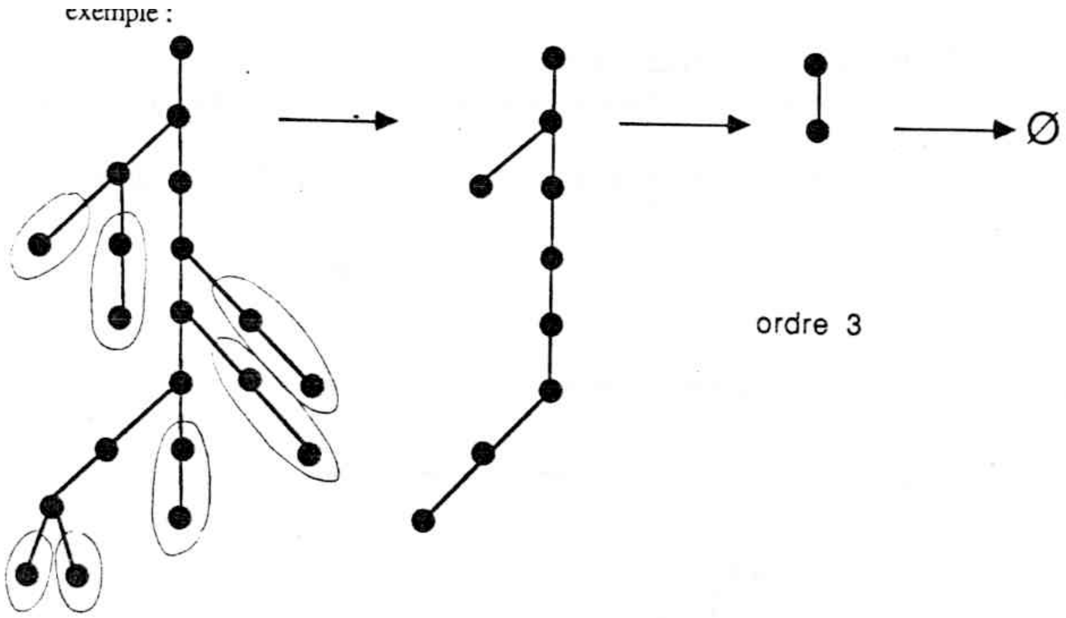
On considère les arbres planaires enracinés (dénombrés par le nombre de Catalan). On définit un filament d'un arbre A comme une suite de sommets $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ vérifiant les trois conditions :

(i) s_1 est une feuille de A

(ii) chaque sommet s_i est le père de s_{i-1} et s_{i-1} est le fils unique de s_i

(iii) soit s_k est la racine de A, soit s_k a des frères

d(A) est l'arbre obtenu en enlevant tous les filaments de A (qui sont 2 à 2 disjoints).
On appelle ordre d'un arbre le plus petit entier k tel que $d^k(A) = \emptyset$.
Calculer la série génératrice des arbres d'ordre k=2.
exemple :



Mots de Motzkin

Soit L le langage formé par les mots de Motzkin (sur l'alphabet $\{x,\bar{x},b\}$) sans facteur $x\bar{x}$.

exemple:

$$w= xb\bar{x}bxbxbb\bar{x}xb\bar{x}\bar{x}$$

Donner une équation algébrique satisfaite par la série (non-commutative) génératrice $\underline{\underline{L}}$ du langage L.

Mots sans facteurs abb

Soit L l'ensemble des mots de $\{a,b\}^*$ n'ayant pas de facteur abb (c'est-à-dire ne pouvant s'écrire sous la forme w=uabbv). Soit a_n le nombre de mots de L de longueur n.

exemple : w= bbbaabaaababaaa.

a) En utilisant la méthode de la matrice de transition, calculer la série génératrice

$$f(t) = \sum_{n\geq o} a_n t^n.$$

b) Donner une expression explicite pour la série génératrice noncommutative du langage L.

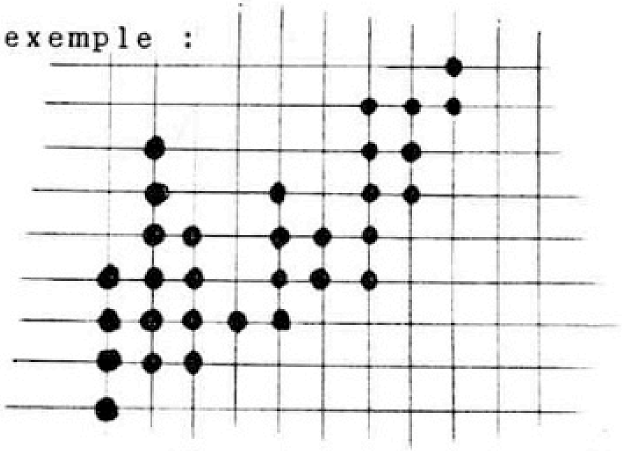
c) Donner une démonstration bijective de la relation $a_n = F_{n+2} - 1$, dans laquelle F_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci (ou nombre de couplages du segment [0,n-1].

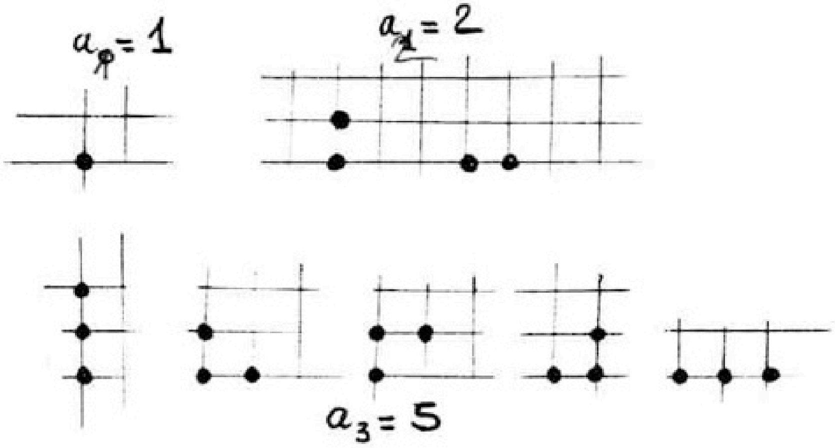
Soit a_n le nombre d'*animaux* A vérifiant les deux propriétés suivantes (voir figure)

(α) A est *dirigé*, c'est-à-dire (0,0) est un point de l'animal et tout point de A peut être atteint par un chemin contenu dans A et ne faisant que des pas élémentaires Nord et Est.

(β) A est *verticalement convexe*, c'est-à-dire $(x,y)\in A, (x,z)\in A \Rightarrow (x,t)\in A$ pour tout entier t compris entre y et z

exemple :





Montrer que $a_n = F_{2n-2}$ (nombre de Fibonacci).

bijections pour des objets autour des nombres de Catalan

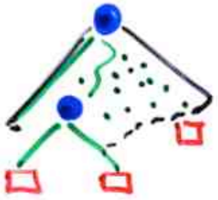
ex 1. [2] Dyck paths, $|\omega| = 2n$

show $$D_{n+1} = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j=n}} D_i D_j \quad ; \quad D_0 = 1$$

$\Rightarrow D_n = C_n$ Catalan

ex 2. [3⁻] find a bijection

binary trees



n . ●

(n+1) □

⟷

Dyck path

$|\omega| = 2n$

ex 3. [3] bijective proof for

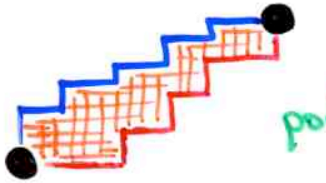
$$2(2n+1)\, C_n = (n+2)\, C_{n+1}$$ with (binary trees)

ex 4 [4^-] bijective proof for

$(n+1)\, C_n = \binom{2n}{n}$ (with Dyck paths)

---

ex 5 [3] bijection



pll polyominoes ⟷ Dyck paths $|\omega| = 2n$

perimeter $2n+2$

---

ex 6 [4^+] nb of pyramids on $\mathbb{Z}$ of n dimers

$a_n = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$

---

ex 7 [4] nb of "semi-pyramids" on $\mathbb{N}$

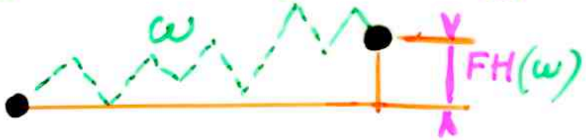
$\pi(\text{max piece}) = \{0,1\}$

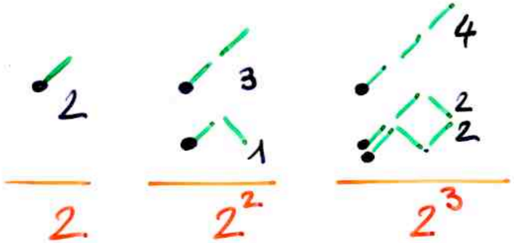
n dimers

$b_n = C_n$ Catalan

ex. average height of final point of left factors of Dyck path

(height starts at 1)



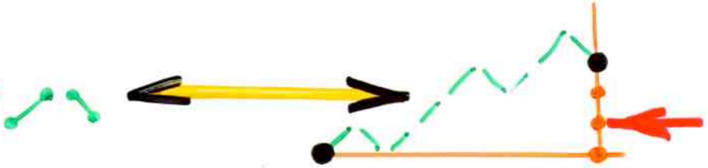


Prove that $$\sum_{|\omega|=n} FH(\omega) = 2^n$$

left factor of Dyck path

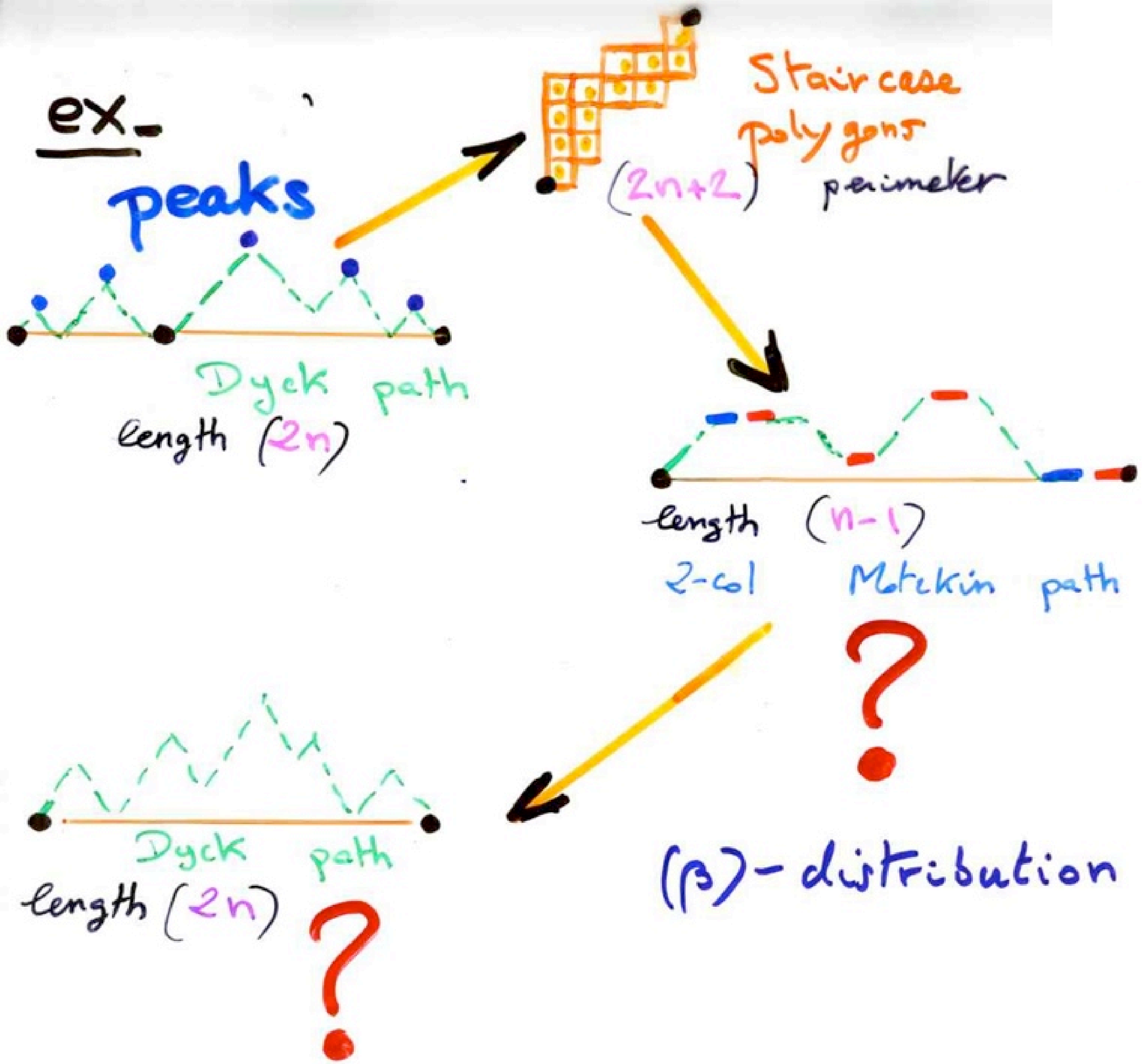
with a bijection

ω any path $|\omega|=n$



pointed paths

This will imply: average final height $\sim \sqrt{n}$


ex.
peaks
Staircase polygons
(2n+2) perimeter
Dyck path
length (2n)
length (n-1)
2-col Motzkin path
?
Dyck path
length (2n)
?
(β)-distribution

problème:
identité de Rogers - Ramanujan et empilements de dominos

ex9 A partition $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k)$ is called a D-partition iff $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geqslant 2$, for every $i = 1, 2, .., k-1$.

notation: $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + .. + \lambda_k$

a) [2] find a bijection between D-partitions λ with k parts and partitions μ with at most k parts such that

$$|\lambda| = |\mu| + k^2$$

b) [1] deduce that the generating function for D-partitions is the left hand-side of the 1st Rogers-Ramanujan identity :

$$RR_1 = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \frac{q^{(k^2)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$$

---

c) We consider heaps of dimers on $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ with valuation

$$v(\{i-1, i\}) = -q^i .$$

[1-] Deduce that the alternating generating function for trivial heaps of dimers

$$\sum_T (-1)^{|T|} v(T) \quad \text{is} \quad D = RR_1$$

d) [1^+] Deduce the alternating generating function for trivial heaps of dimers on $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, --\}$ is the left hand-side of the 2nd Rogers-Ramanujan identity :

$$RR_2 = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{q^{k(k+1)}}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^k)}$$

---

e) [0^-] Deduce that the generating function for weighted "semi-pyramid" of dimers on $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (see def ex 7) is :

$$\frac{RR_2}{RR_1}$$