Mini-courses
Mini-cours
5–9 May 2008

Formes normales de structures de Poisson

Laurent Stolovitch
Institut de Mathématiques
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse CEDEX 9
FRANCE
[stolo@picard.ups-tlse.fr]

Résumé

Soit M une variété de dimension N. Une **structure de Poisson** est la donnée d'un crochet $\{.,.\}$ qui assigne, à un couple (f,g) de germes de fonctions en un point x de M, un germe $\{f,g\}$ de fonction en x vérifiant les propriétés suivantes :

– $\{.,.\}$ est bilinéaire et antisymétrique,
– $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$ (identité de Jacobi),
– $\{f,gh\}=\{f,g\}h+\{f,h\}g$ (identité de Leibniz).

Il revient au même de considérer un germe de champ de bi-vecteurs P (section de $TM\wedge TM$) vérifiant une certaine relation compatibilité. D'après un résultat d'Alan Weinstein [Wei83], on peut trouver un bon système de coordonnées locales $(p_1,\dots,p_m,q_1,\dots,q_m,x_1,\dots,x_r)$ au voisinage d'un point p dans lequel on ait $p_i(p)=0, q_i(p)=0, x_j(p)=0$ et

$$P=\sum_{1\leq i\leq m}\frac{\partial}{\partial p_i}\wedge\frac{\partial}{\partial q_i}+\sum_{1\leq i<j\leq r}P_{i,j}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}$$

avec $P_{i,j}(0)=0$ et $2m+r=N$. L'étude de la classification locale d'un crochet de Poisson (c'est-à-dire les classes d'équivalence par conjugaison par des germes de difféomorphismes) revient donc à celle d'un crochet de Poisson nul en un point. Dans cette situtation, la partie linéaire (ou 1-jet en 0) de P définit une structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur l'espace cotangent en 0. Dans un mémoire remarquable, Jack Conn [Con84, Con85] a démontré qu'un tel crochet est holomorphiquement (si les donnée le sont) linéarisable lorsque que cette algèbre est semi-simple. Le résultat dans la catégorie C^∞ est aussi vrai.

Dans ce mini-cours, nous proposons de regarder ce qui se passe pour certaines structures de Poisson dont l'algèbre de Lie associée est un produit semi-direct $\mathbb{C}^p \ltimes \mathbb{C}^n$. Nous verrons que l'on ne peut pas les linéariser en général mais nous donnerons une forme normale. Dans des situations simples, nous donnerons des résultats de conjugaisons analytiques. Les résultats généraux figurent dans [Sto04]

Dans un deuxième temps, nous discuterons de récents progrès concernant les strucutres de Poisson qui ont une partie linéaire nulle mais une partie quadratique non-nulle en un point [Loh05].

Références

[Con84] J. Conn. Normal forms for analytic Poisson structures. *Ann. Math.*, 119 :577–601, 1984.

[Con85] J. Conn. Correction to "normal forms for analytic Poisson structures". *Ann. Math.*, 121 :433–436, 1985.

[Loh05] P. Lohrmann. Sur la normalisation holomorphe de structures de Poisson à 1-jet nul. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(11) :823–826, 2005.

[Sto04] L. Stolovitch. Sur les structures de poisson singulières. *Ergod. Th. & Synam. Sys., special volume in the memory of Michel Herman*, 24 :1833–1863, 2004.

[Wei83] A. Weinstein. The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geometry*, 18 :523–557, 1983.