LE HALO SPECTRAL

par

Fabrizio, Adrian and Vincent

1. Introduction

1.1. Présentation des résultats. — Soit p un nombre premier et N un entier premier à p. Soit X la courbe modulaire sur $\mathbb{Z}_p$ de niveau N. Soit $\bar{X}$ sa réduction modulo p, $\bar{X}_{ord}$ le lieu ordinaire et $\mathfrak{X}_{ord}$ le schéma formel p-adique lieu ordinaire. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de $\bar{X}_{ord}$ et $\rho : \Pi_1(\bar{X}_{ord}, \bar{x}) \to \mathbb{Z}_p^\times$ la représentation donnée par la tour d'Igusa qui paramètre les trivialisations de la partie multiplicative du module de Tate du schéma semi-abélien universel. Pour tout caractère $\kappa : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$, l'équivalence de Katz [**20**], associe à $\kappa \circ \rho$ un ϕ-module étale ω^κ sur $\mathfrak{X}_{ord}$. Ses sections globales sont l'espace M_κ^{p-ad} des formes modulaires p-adiques de poids κ. L'opérateur de Dwork associé est $U_p = p^{-1}\mathrm{Tr}_\phi$. Dans [**20**] si κ est algébrique, puis dans [**8**] (complété par [**10**], [**5**] et revisité dans [**1**] et [**25**]), il est démontré que le ϕ-module ω^κ surconverge. Ses sections surconvergentes sont l'espace $M_\kappa^\dagger$ des formes modulaires surconvergentes de poids κ.

L'opérateur U_p est compact et on peut définir, d'après [**27**], la série caractéristique $\mathcal{P}_\kappa(X) := \det(1 - XU_p|M_\kappa^\dagger)$ qui est une fonction entière de la variable X.

Notons $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ l'algèbre d'Iwasawa. Coleman montre de plus l'existence d'une série caractéristique universelle $\mathcal{P}(X) \in \Lambda[[X]]$ qui interpole les différentes séries caractéristiques $\mathcal{P}_\kappa(X)$. Notons $\mathcal{W}^{rig} = (\mathrm{Spf}\ \Lambda)^{rig}$ l'espace rigide des poids, isomorphe à une union finie $\coprod \mathcal{W}_\chi^{rig}$ de boules ouvertes de rayon 1 paramétrées par les caractères $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ (où $q = 4$ si $p = 2$ et $q = p$ sinon). Coleman et Mazur définissent la variété spectrale $\mathcal{Z}^{rig} = V(\mathcal{P}) \subset \mathcal{W}^{rig} \times \mathbb{A}^1$. Ses points sont des couples (κ, α^{-1}) où κ est un poids et α une valeur propre non nulle de U_p agissant sur $M_\kappa^\dagger$. Soit w la projection $w : \mathcal{Z}^{rig} \to \mathcal{W}^{rig}$. La géométrie de $\mathcal{Z}^{rig}$ est assez mystérieuse. Rappelons le résultat fondamental suivant qui montre l'existence de familles de pente finie :

Théorème 1.1. — *[[**10**], chap. 7] La variété spectrale est admissiblement recouverte par des ouverts $\mathcal{U}$ tels que le morphisme $w|_\mathcal{U} : \mathcal{U} \to w(\mathcal{U})$ est fini et plat.*

Dans ce travail, on s'intéresse à la variété spectrale au bord de l'espace des poids. Fixons un isomorphisme $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times][[T]]$, en envoyant $1+q$ sur $1+T$. Pour tout caractère χ de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, notons $\mathcal{P}_\chi(X) \in \mathbb{Z}_p[[T]][[X]]$ la χ-partie de $\mathcal{P}(X)$ et $\overline{\mathcal{P}_\chi}(X) \in \mathbb{F}_p[[T]][[X]]$ sa réduction modulo p. Notons aussi $\bar{\kappa}_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ le caractère obtenu par réduction du caractère universel et projection sur la χ-partie (on remarquera que si $p = 2$, $\bar{\kappa}_\chi$ est indépendant de χ). Dans [**9**], Coleman observe que c'est une série entière de la variable X à coefficient dans l'anneau $\mathbb{F}_p[[T]]$ equipé de la topologie T-adique et il conjecture le résultat suivant :

Conjecture 1 **([9])**. — *Pour chaque caractère χ du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, on possède un $\mathbb{F}_p((T))$-espace de formes surconvergentes $M^\dagger_{\bar\kappa_\chi}$ de poids $\bar\kappa_\chi$ et un opérateur compact U_p dont la série caractéristique est $\overline{\mathcal{P}_\chi}(X)$.*

Cette conjecture est à l'origine de notre travail. Pour tout caractère $\bar\kappa_\chi$ comme au dessus, l'équivalence de Katz associe à $\bar\kappa_\chi \circ \rho : \Pi_1(\bar X_{ord}, \bar x) \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ un ϕ-module étale $\omega^{\bar\kappa_\chi}$ sur le schéma formel T-adique $\mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}} := \bar X_{ord} \times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p} \mathrm{Spf}\ \mathbb{F}_p[[T]]$. Notons $\mathcal{X}_{\{\infty\}}$ l'espace rigide sur $\mathbb{F}_p((T))$ associé au schéma formel $\bar X \times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p} \mathrm{Spf}\ \mathbb{F}_p[[T]]$ et $\mathcal{X}_{ord,\{\infty\}} \subset \mathcal{X}_{\{\infty\}}$ l'ouvert ordinaire. On peut alors se demander si le ϕ-module étale $\omega^{\bar\kappa_\chi}$ surconverge sur un voisinage de $\mathcal{X}_{ord,\{\infty\}}$ dans $\bar{\mathcal{X}}$.

Théorème 1.2. — *Le ϕ-module $\omega^{\bar\kappa_\chi}$ est surconvergent.*

Nous définissons alors $M^\dagger_{\bar\kappa_\chi}$ comme l'espace des sections surconvergentes de $\omega^{\bar\kappa_\chi}$. On possède sur cet espace un opérateur compact U_p associé à ϕ. On peut définir sa série caractéristique et on veut vérifier qu'elle vaut $\overline{\mathcal{P}_\chi}(X)$. Il nous faut à présent relier cet espace aux espaces de formes surconvergentes de caractéristique 0.

Commençons par "compactifier" l'espace des poids. L'idée est d'ajouter à $\mathcal{W}^{rig}$ les caractères $\bar\kappa_\chi$. Cet espace des poids compactifié possèdera donc des points de caractéristique 0 et p, on sort du cadre classique de la géométrie rigide, et nous utilisons à présent la théorie des espaces adiques de Huber. Définissons donc $\mathcal{W} = \mathrm{Spa}\ (\Lambda, \Lambda)^{an}$, c'est l'ouvert des points analytiques de $\mathrm{Spa}\ (\Lambda, \Lambda)$. Comme ensemble, $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{rig} \bigcup \{\bar\kappa_\chi,\ \chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \to \mathbb{C}_p^\times\}$ (dorénavant $\mathcal{W}^{rig}$ désigne l'espace adique associé à $\mathcal{W}^{rig}$). Tout voisinage ouvert de $\{\bar\kappa_\chi\}$ dans $\mathcal{W}$ contient une couronne de rayon extérieur 1 dans la composantes connexe $\mathcal{W}^{rig}_\chi$ de $\mathcal{W}^{rig}$ (resp. dans chaque composante connexe de $\mathcal{W}^{rig}$ si $p = 2$).

On possède un faisceau stuctural $(\mathscr{O}_{\mathcal{W}}, \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}})$ et sur $\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}}$ la topologie est (p, T)-adique. Plus précisément, sur tout ouvert quasi-compact de $\mathcal{W}^{rig}$, la topologie (p, T)-adique coincide avec la topologie p-adique. Inversement, sur tout ouvert quasi-compact qui évite les centres $T = 0$ des disques ouverts $\mathcal{W}^{rig}_\chi$ la topologie (p, T)-adique coincide avec la topologie T-adique. On assiste donc, à mesure qu'on se rapproche du bord de $\mathcal{W}$, à un glissement de la topologie p-adique vers la topologie T-adique.

Considérons la courbe modulaire relative $\mathcal{M}_{[0,\infty]} = X \times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_p} \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ et son ouvert ordinaire $\mathcal{M}_{ord,[0,\infty]}$. La construction de Katz appliquée au caractère universel $\mathbb{Z}_p^\times \to \Lambda^\times$ et à ρ nous fournit une famille universelle $\omega^\kappa_{[0,\infty]}$ de ϕ-modules sur $\mathcal{M}_{ord,[0,\infty]}$. Un système fondamental de voisinages de $\mathcal{M}_{ord,[0,\infty]}$ dans $\mathcal{M}_{[0,\infty]}$ est donné par les ouverts $\mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$ d'équation :

$$|\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}}| \geq \sup\{|T|, |p|\}$$

où $\tilde{\mathrm{Ha}}$ désigne un relèvement arbitraire local de l'invariant de Hasse. Si on regarde ces voisinages pour la topologie p-adique sur l'ouvert $\mathcal{W}^{rig}$, alors ils se rétrécissent vers le lieu ordinaire à l'infini. Dans [**1**] et [**25**], nous avons montré la surconvergence de $\omega^\kappa_{[0,\infty]}$ au dessus de $\mathcal{W}^{rig}$ et dans le théorème 1.2 nous avons montré la surconvergence à l'infini. Le théorème suivant unifie ces deux résultats :

Théorème 1.3. — *La famille universelle de ϕ-modules $\omega^\kappa_{[0,\infty]}$ sur $\mathcal{M}_{ord,[0,\infty]}$ surconverge sur $\mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$ pour $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p = 2$).*

En particulier, nous pouvons vérifier la conjecture de Coleman :

Corollaire 1.1. — *La série caractéristique de U_p sur $\overline{M}^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ vaut $\overline{\mathcal{P}_\chi}$.*

Pour finir, nous construisons au voisinage de l'infini des familles de pente finie pour la topologie T-adique. Soit $\mathcal{Z} = V(\mathcal{P}) \subset \mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ la variété spéctrale “compactifiée”. On possède sur $\mathcal{Z}$ un faisceau cohérent sans torsion $M^\dagger$ d'espaces caractéristiques de formes surconvergentes et une courbe de Hecke $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ où $\mathscr{O}_{\mathcal{E}}$ est le sous-faisceau de $\mathrm{End}_{\mathcal{Z}}(M^\dagger)$ engendré par les opérateurs de Hecke. Le théorème suivant, généralisation du théorème 1.1, montre l'existence de familles de pente finie pour la topologie T-adique au voisinage de l'infini.

Théorème 1.4. — *Le morphisme $\mathcal{Z} \to \mathcal{W}$ est localement fini et plat sur $\mathcal{Z}$.*

En particulier, toute forme de pente finie dans $M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ est la spécialisation d'une famille de pente finie paramétrée par un revêtement fini et plat d'un ouvert de $\{\bar{\kappa}_\chi\}$ dans $\mathcal{W}_\chi$.

1.2. Questions et perspectives. —

1.2.1. Polygone de Newton au bord de l'espace des poids. — Buzzard et Kilford [**6**] ont étudié la variété spectrale en niveau 1 pour $p = 2$. Ils ont démontré que pour les poids κ vérifiant $v(\kappa(5)-1) < 3$ et $\kappa(1) = -1$, les pentes de l'operateur U_p sur l'espace des formes de poids κ sont $0, t, 2t, 3t, ...$ où $t = v(\kappa(5) - 1)$. Coleman conjecture la généralisation suivante de ce résultat :

Conjecture 2 **(**[**9**]**)**. — *Soit (n_i, m_i) les points de rupture du polygone de Newton de $\overline{\mathcal{P}}_\chi$. Pour tout κ sur la couronne d'équation $|q| < |T| < 1$ de $\mathcal{W}_\chi$, les points de rupture du polygone de Newton de $\mathcal{P}_\kappa$ sont $(n_i, v_p(\kappa(1+q)-1)m_i)$.*

Pour les formes surconvergentes quaternioniques, cette conjecture est (en partie ?) démontrée dans la prépublication [**21**]. Signalons également que dans [**2**], il est démontré que la conjecture de Coleman entraîne que les pentes du polygone de Newton de $\overline{\mathcal{P}}_\chi$ forment une union finie de progressions arithmétiques.

question 1.1. — Existe-t-il un opérateur géométrique sur $\mathcal{M}^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ qui explique cette progression arithmétique ?

1.2.2. Dimension supérieure. — Les résultats de cet article devraient pouvoir se généraliser sans trop de problème à des variétés de Shimura PEL plus générales. Remarquons que le bord de l'espace des poids compactifié sera toujours un fermé de codimension 1, et donc de dimension positive dès que le rang du groupe est au moins 2. A notre connaissance, il n'y a pas de conjecture sur la géométrie au bord en dimension supérieure.

1.2.3. Théorie de Hodge. — Soit $f \in M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ une forme surconvergente de pente finie, propre pour l'algèbre de Hecke. On peut alors lui associer une représentation semi-simple continue :

$$\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{F}}_p[[T]]).$$

Cette représentation est impaire et vérifie la compatibilité locale globale semi-simplifiée hors de p. De plus det $\rho_f = (\bar{\kappa}_\chi^{-1} \circ \chi_{cycl}).\omega$ où χ_{cycl} désigne le caractère cyclotomique et ω sa réduction modulon p. Se pose la question de décrire la représentation $\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$. Si f est de pente nulle vérifie $U_p f = \alpha.f$, alors d'après la théorie de Hida,

$$\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \begin{pmatrix} nr(\alpha) & \star \\ 0 & nr(\alpha^{-1})(\bar{\kappa}_\chi^{-1} \circ \chi_{cycl}).\omega \end{pmatrix}$$

où $nr(\alpha)$ est le caractère non ramifié qui applique le Frobenius sur α.

Dans le cas de pente finie, on peut espérer que les choses se passent comme en caractéristique 0. Soit $\mathbb{D}$ la boule unité ouverte de la variable Z sur le corps non-archimédien $\mathbb{F}_p((T))$. On définit des actions de ϕ et $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times$ par les formules habituelles $\phi(Z) = Z^p$ et $\gamma(Z) = (1+Z)^\gamma - 1$. Pour tout $r > 0$ soit $\mathbb{D}_{(0,r]} \subset \mathbb{D}$ la couronne $0 < v(Z) < r$. Elle est stable sous Γ et $\phi : \mathbb{D}_{(0,r]} \to \mathbb{D}_{(0,pr]}$. Dans ce contexte, un ϕ-module r-surconvergent est un faisceau localement libre $\mathscr{F}$ sur $\mathbb{D}_{(0,r]}$ munit d'un isomorphisme $\phi^\star \mathscr{F} \simeq \mathscr{F}|_{\mathbb{D}_{(0,\frac{r}{p}]}}$. Un (ϕ,Γ)-module r-surconvergent est un ϕ-module surconvergent équipé d'une action de Γ qui commute à ϕ. Soit $(\phi,\Gamma) - Mod_r$ la catégorie des (ϕ,Γ)-modules r-surconvergents. Si $0 < r' < r$, on un foncteur de restriction $(\phi,\Gamma) - Mod_r \to (\phi,\Gamma) - Mod_{r'}$. La catégorie $(\phi,\Gamma) - Mod$ des (ϕ,Γ)-modules surconvergents est la limite inductive des catégories $(\phi,\Gamma) - Mod_r$. En utilisant les méthodes de [**3**], on démontre :

Théorème 1.5. — *A toute représentation continue $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n\big(\bar{\mathbb{F}}_p((T))\big)$ on peut associer un (ϕ,Γ)-module $\mathscr{D}(\rho)$.*

On devrait pouvoir (suivant [**14**]) construire une filtration de Harder-Narishiman sur la catégorie $(\phi,\Gamma) - Mod$ et démontrer qu'on a une équivalence entre représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et (ϕ,Γ)-modules semi-stables de pente 0.

question 1.2. — Soit ρ_f la représentation associée à une forme modulaire de pente finie. Le (ϕ,Γ)-module $\mathscr{D}(\rho_f)$ est-il triangulin ?

Plus précisément, on devrait possèder une suite exacte $0 \to L \to \mathscr{D}(\rho_f) \to L' \to 0$ où L est le (ϕ,Γ)-module de rang 1 avec action de ϕ par α et action triviale de Γ.

question 1.3. — Peut-on caractériser quand une représentation semi-simple continue impaire $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2\big(\bar{\mathbb{F}}_p((T))\big)$ est la représentation associée à une forme surconvergente de pente finie ?

2. L'espace des poids

2.1. Définition. — Soit $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ l'algèbre d'Iwasawa. Nous allons lui associer plusieurs espaces adiques ([**19**], [**18**], [**17**]).

2.1.1. Points analytiques. — Posons $q = 4$ si $p = 2$ ou $q = p$ si $p \neq 2$. On a $\mathbb{Z}_p^\times \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \times \exp(q)^{\mathbb{Z}_p}$. On obtient alors un isomorphisme $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times][[T]]$ en posant $1+T = \exp(q)$ et Λ est complet pour la topologie (p,T)-adique.

Soit $\mathfrak{W} = \mathrm{Spa}(\Lambda,\Lambda)$. C'est l'espace des classes d'équivalences de valuations continues sur Λ, il est équipé d'un faisceau en algèbres topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{W}}$, et de plus, pour chaque point $x \in \mathfrak{W}$, on dispose d'une valuation v_x sur la fibre $\mathscr{O}_{\mathfrak{W},x}$.

Rappelons que si (A, A^+) est une algèbre affinoide, et si $x \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$, on appelle support de x, l'idéal premier de A des éléments $a \in A$ tels que $|a|_x = 0$. Suivant [**17**], sect. 3, on dit qu'un point est analytique si son support est non ouvert et qu'il est non-analytique sinon.

Lemme 2.1. — *Les points non-analytiques de $\mathfrak{W}$ sont en bijection avec* $\mathrm{Spf}\ \Lambda$.

Démonstration. Si x est non-analytique, alors $|.|_x$ se factorise en une valuation sur $\Lambda/(p,T)$. Son support est donc un idéal maximal de Λ. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de Λ (qui correspond au choix d'un caractère à valeur dans $\mathbb{F}_p$ de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$). On peut lui associer la valuation définie par $v_{\mathfrak{m}}(a) = 0$ si $a \in \mathfrak{m}$, $v_{\mathfrak{m}}(a) = 1$ sinon, qui nous donne la bijection cherchée. □

Définition 2.1. — *Soit $\mathcal{W}$ l'ouvert constitué des points analytiques de $\mathfrak{W}$.*

2.1.2. Description de $\mathcal{W}$. — Pour tout élément $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}_{\rangle 0}$, on note :
- $\mathcal{W}_{\leq \frac{r}{s}} = \{x \in \mathcal{W}, |T^r|_x \leq |p^s|_x \neq 0\}$,
- $\mathcal{W}_{\geq \frac{r}{s}} = \{x \in \mathcal{W}, |p^s|_x \leq |T^r|_x \neq 0\}$.

On pose également :
- $\mathcal{W}_{\geq 0} = \mathcal{W}_{\leq \infty} = \mathcal{W}$,
- $\mathcal{W}_{\leq 0} = \{x \in \mathcal{W}, |T|_x = 0\}$,
- $\mathcal{W}_{\geq \infty} = \{x \in \mathcal{W}, |p|_x = 0\}$.

Si $I = [a, b] \subset [0, \infty]$ est un intervalle avec $a, b \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, on pose $\mathcal{W}_I = \mathcal{W}_{\leq b} \cap \mathcal{W}_{\geq a}$. Si $I \neq \{0\}$ et $I \neq \{\infty\}$, $\mathcal{W}_I$ est un ouvert rationnel.

Soit $x \in \mathcal{W}$ une valuation de rang 1. On peut définir la valuation p-adique de x par

$$v_p(x) = \frac{\log_p(|T|_x)}{\log_p(|p|_x)} \in [0, \infty].$$

On vérifie alors facilement que $x \in \mathcal{W}_I \Leftrightarrow v_p(x)^{-1} \in I$.

L'espace $\mathcal{W}$ est quasi-compact mais n'est pas affinoide. Cependant, $\mathcal{W}_I$ est affinoide pour tout intervalle fermé à coordonnées rationnelles $I \subsetneq [0, \infty]$. Par exemple, $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{[0,1]} \cup \mathcal{W}_{[1,\infty]}$ avec par définition :

$$\mathcal{W}_{[0,1]} = \mathrm{Spa}(\Lambda[\frac{1}{p}], \Lambda[\frac{T}{p}]) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{[1,\infty]} = \mathrm{Spa}(\Lambda[\frac{1}{T}], \Lambda[\frac{p}{T}]).$$

La topologie sur Λ est la topologie (p, T)-adique. Soit $t \in \mathbb{Q}_{\rangle 0}$. La topologie est p-adique dans $\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[0,t]}}$ et p est une unité topologiquement nilpotente dans $\mathscr{O}_{\mathcal{W}_{[0,t]}}$. La topologie est T-adique sur $\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[t,+\infty]}}$ et T est une unité topologiquement nilpotente dans $\mathscr{O}_{\mathcal{W}_{[t,+\infty]}}$. Sur un intervalle rationnel $[a, b] \subset]0, +\infty[$, les topologies p et T-adiques coïncident sur $\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[a,b]}}$ et p, T sont des unités dans $\mathscr{O}_{\mathcal{W}_{[a,b]}}$.

2.1.3. Le bord. — Si $t \in [0, +\infty[$, $\mathcal{W}_{[0,t]}$ est une réunion finie de boules de centre 0 et de rayon $p^{-\frac{1}{t}}$. Posons $\mathcal{W}^{rig} = \mathcal{W}_{[0,+\infty[}$. C'est l'espace adique associé à la fibre générique de Spf Λ au sens de Berthelot ([**4**], sect. 0), et c'est une réunion finie de boules ouvertes de rayon 1. C'est l'espace des poids qui est traditionnellement considéré dans la théorie des familles analytiques de formes surconvergentes. Le bord de l'espace des poids est par définition le fermé $\mathcal{W}_{\{\infty\}} = \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}^{rig}$. Tout point $x \in \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T))$ correspond à un morphisme

$$\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T)) \xrightarrow{x} \mathbb{F}_p((T)).$$

On peut associer à x une valuation v_x sur Λ, obtenue en composant le morphisme de réduction $\Lambda \to \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T))$, le morphisme x, et la valuation T-adique sur $\mathbb{F}_p((T))$.

Lemme 2.2. — *Le bord $\mathcal{W}_{\{\infty\}}$ est $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T)), \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times][[T]])$. C'est l'ensemble des valuations v_x pour $x \in \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T))$.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{W}_{\{\infty\}}$ est l'ensemble des points analytiques ayant p dans leur support. Il en résulte aussitôt que c'est $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]((T)), \mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times][[T]])$, qui est bien l'ensemble fini des valuations v_x. □

2.1.4. Composante libre et composante finie. — On note $\mathcal{W}^0 = \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p[[T]], \mathbb{Z}_p[[T]])^{an}$. C'est le fermé de $\mathcal{W}$ qui correspond au caractère trivial de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$. On note aussi $\mathcal{W}^0_I = \mathcal{W}^0 \cap \mathcal{W}_I$ pour tout intervalle $I \subset [0, +\infty]$. On note $\mathcal{W}^f = \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times], \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times])$ l'espace des caractères de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$. On a la décomposition

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^0 \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)} \mathcal{W}^f.$$

Si $p \geq 3$, $\mathcal{W}^0$ est la composante connexe de $\mathcal{W}$ qui contient le caractère trivial. Si $p = 2$, $\mathcal{W}$ est connexe !

2.2. Analyticité du caractère universel. — On note $\mathbb{G}_a^+$ le faisceau en anneaux sur la catégorie des espaces adiques définit par $\mathbb{G}_a^+(X) = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X^+)$. On note $\mathbb{G}_m^+$ le sous-faisceau en groupes de $\mathbb{G}_a^+$ des éléments inversibles pour la multiplication.

On dispose du caractère universel $\kappa^{un} : \mathbb{Z}_p^\times \to \Lambda^\times$. Ce caractère peut-être vu comme un accouplement :

$$\mathcal{W} \times \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{G}_m^+.$$

Si on restreint κ^{un} a certains ouverts de l'espace des poids, alors le caractère devient localement analytique, c'est à dire qu'il se prolonge en un caractère du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n\mathbb{G}_a^+)$.

Lemme 2.3. — *Pour tout $n \geq 1$, on a $\kappa^{un}(1+qp^{n-1}\mathbb{Z}_p)-1 \subset (T^{p^{n-1}}, T^{p^{n-2}}p, ..., p^{n-1}T)\Lambda$.*

Démonstration. Rappelons que la valuation p-adique de $C_{p^n}^k$ vaut $n - v_p(k)$. On a donc $\kappa^{un}(\exp(qp^{n-1})) = (1+T)^{p^{n-1}} = \sum_{k=0}^{p^{n-1}} C_{p^{n-1}}^k T^k = 1 \mod (T^{p^{n-1}}, T^{p^{n-2}}p, ..., p^{n-1}T)$. □

Proposition 2.1. — *Pour tout $n \geq 1$, le caractère universel nous fournit un accouplement :*

$$\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]} \times \mathbb{Z}_p^\times(1 + qp^{n-1}\mathbb{G}_a^+) \to \mathbb{G}_m^+$$

qui se restreint en un accouplement :

$$\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]} \times (1 + qp^{n-1}\mathbb{G}_a^+) \to 1 + q\mathbb{G}_a^+.$$

Démonstration. Soit (R, R^+) une algèbre affinoide complète et soit $f : \mathrm{Spa}\ (R, R^+) \to \mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}$ un morphisme donné par une morphisme $f : (\mathscr{O}_{\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}}, \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}}) \to (R, R^+)$. Il s'agit alors de construire un caractère $\kappa_f : \mathbb{Z}_p^\times(1 + qp^{n-1}R^+) \to (R^{+\times})$. La restriction du caractère à $\mathbb{Z}_p^\times$ est donné par la composition

$$\mathbb{Z}_p^\times \to \Lambda^\times \to \mathscr{O}^{+\times}_{\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}} \to R^{+\times}$$

On a des isomorphismes inverses donnés par l'exponentielle et le logarithme $qp^{n-1}R^+ \simeq 1 + qp^{n-1}R^+$. D'autre part, $\kappa^{un}(\exp(q)) = 1 + T$ et $\kappa^{un}(\exp(qp^{n-1})) = (1+T)^{p^{n-1}}$. Or, $(1+T)^{p^{n-1}} = 1 + qh(T)$ où $h(T) \in \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[0,p^nq^{-1}]}}[T]$ d'après le lemme précédent.

Posons donc, pour tout $r \in R^+$, $\kappa_f\big(\exp(qp^{n-1}r)\big) = f\Big(\exp\big(r\log(1 + qh(T))\big)\Big)$. Le fait que le caractère envoie $1 + p^{n-1}q\mathbb{G}_a^+$ dans $1 + q\mathbb{G}_a^+$ est évident sur la formule. □

2.3. Le caractère au bord. — On s'intéresse maintenant au caractère universel au voisinage du bord. Il n'est plus localement analytique.

Corollaire 2.1. — *On a $\kappa^{un}(1+p^nq\mathbb{Z}_p) - 1 \subset T^{p^n}\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[p^n,+\infty]}}$. En particulier, le caractère universel se factorise en un caractère :*

$$(\mathbb{Z}/p^nq\mathbb{Z})^\times \to (\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[p^n,+\infty]}}/T^{p^n}\mathscr{O}^+_{\mathcal{W}_{[p^n,+\infty]}})^\times.$$

Démonstration. En effet, dans $\mathcal{O}^+_{\mathcal{W}_{[p^n,+\infty]}}$, T^{p^n} divise p et on est ramené au lemme 2.3. □

3. Courbes modulaires et tour d'Igusa

3.1. Courbes modulaires formelles et voisinages du lieu ordinaires. — Soit $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$ la courbe modulaire compactifiée de niveau $N \geq 3$ premier à p. Soit $\mathfrak{X} \to \operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p$ sa complétion formelle p-adique. Soit E le schéma semi-abélien universel sur $\mathfrak{X}$, et ω le faisceau co-normal en la section neutre de E. Soit $\mathrm{Ha} := \mathrm{Ha}(E) \in \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \omega^{p-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)$ l'invariant de Hasse. Remarquons tout de suite que Ha^{p^n} se relève canoniquement en une section de $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \omega^{(p-1)p^n} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Soit $\mathrm{Hdg} := \mathrm{Hdg}(E) \subset \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ l'idéal de Hodge. Soit A_0 un anneau intègre, $\alpha \in A_0$ un élément non nul tel que A_0 soit α-adiquement complet. On suppose aussi que $p \in \alpha A_0$.

Soit $\mathfrak{Y}$ le schéma formel sur $\operatorname{Spf} A_0$ obtenu en changeant de base $\mathfrak{X}$ de $\operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p$ à $\operatorname{Spf} A_0$. On note $\mathfrak{Y}_{ord}$ l'ouvert lieu ordinaire de $\mathfrak{Y}$, définit par la condition $\mathrm{Ha} \neq 0$ inversible.

Définition 3.1. — *Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, soit $\mathfrak{Y}_r \to \mathfrak{Y}$ le schéma formel qui représente le foncteur qui à toute A_0-algèbre α-adiquement complète R associe les classes d'équivalences de couples $\big(f : \operatorname{Spf} R \to \mathfrak{X}, \eta \in \mathrm{H}^0(\operatorname{Spf} R, f^\star \omega^{(1-p)p^{r+1}})\big)$ tels que*

$$\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}.\eta = \alpha \mod p^2.$$

Deux couples (f, η) et (f', η') sont équivalents si $f = f'$ et $\eta = \eta'(1 + \frac{p^2}{\alpha} u)$ pour un élément $u \in R$.

Remarque 3.1. — L'idéal de Hodge Hdg est localement libre sur $\mathfrak{Y}_r$. Soit $\operatorname{Spf} B$ un ouvert affine de $\mathfrak{Y}$ sur lequel le faisceau ω est trivial. L'idéal de Hodge est alors principal, engendré par un élément $\tilde{\mathrm{Ha}}$. L'image inverse de $\operatorname{Spf} B$ dans $\mathfrak{Y}_r$ vaut $\operatorname{Spf} B\langle X \rangle / \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}} X - \alpha$. Par conséquent, $\mathfrak{Y}_r$ peut aussi être défini comme l'ouvert d'un éclatement de $\mathfrak{Y}$.

Proposition 3.1. — *Supposons que $p \in \alpha^{p^k} A_0$. Sur $\mathfrak{Y}_r$ on dispose pour tout $n \leq r + k$ d'un sous-groupe canonique $H_n \hookrightarrow E[p^n]$ qui est localement libre de rang p^n. La réduction de H_n modulo $p\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$ coincide avec le noyau de Frobenius à la puissance n.*

Démonstration. Voir l'appendice A. □

Proposition 3.2. — *L'isogénie "diviser par le sous-groupe canonique" induit un morphisme fini et plat de degré p, $\phi : \mathfrak{Y}_r \to \mathfrak{Y}_{r-1}$ pour tout $r \geq 2$, qui relève le morphisme de Frobenius relatif modulo $p\mathrm{Hdg}^{-1}$.*

Démonstration. Soit (f, η) un R-point de $\mathfrak{Y}_r$. Le morphisme f est donné par un schéma semi-abélien $E \to \operatorname{Spec} R$ et une structure de niveau N, notée ψ_N. Soit $E' = E/H_1$ et ψ'_N la structure de niveau N induite sur E'. Au couple (E', ψ'_N) correspond un nouveau morphisme $f' : \operatorname{Spf} R \to \mathfrak{Y}$. D'autre part, on a la relation $\mathrm{Ha}(E') = \mathrm{Ha}(E)^p \mod \frac{p}{\mathrm{Hdg}}$. Ici on utilise le fait que $E' = E^{(p)} \mod \frac{p}{\mathrm{Hdg}}$ et donc que $\omega_{E'} \simeq \omega_E^p \mod \frac{p}{\mathrm{Hdg}}$. En élevant à la puissance p^{r-1} on obtient : $\mathrm{Ha}(E')^{p^r} = \mathrm{Ha}(E)^{p^{r+1}} \mod \frac{p^2}{\mathrm{Hdg}}$. Il en résulte que $\mathrm{Ha}(E')^{p^r}\eta = \alpha \mod \frac{p^2}{\mathrm{Hdg}}$. Il existe alors $\tilde{\eta} \in \omega_{E'}^{(p-1)p^r}$ un relèvement de $\eta \mod \frac{p}{\mathrm{Hdg}}$ tel que $\mathrm{Ha}(E')^{p^r}\tilde{\eta} = \alpha \mod p^2$. Le morphisme cherché est donc $(f, \eta) \mapsto (f', \tilde{\eta})$. Le morphisme obtenu relève le Frobenius relatif modulo $\frac{p}{\mathrm{Hdg}}$, qui est un morphisme fini et plat. Comme tous les schémas formels en jeu sont sans A_0-torsion, il en résulte que le morphisme est fini et plat. □

3.2. Tour d'Igusa partielle. — L'existence du sous-groupe canonique permet de construire des revêtements des schémas formels $\mathfrak{Y}_r$.

3.2.1. construction. — On fait à présent l'hypothèse que le schéma formel $\mathfrak{Y}_r$ est excellent, normal, localement le spectre formel d'un quotient d'un anneau régulier. Rappelons le théorème suivant qui permet de vérifier dans la pratique le caractère excellent d'un schéma formel :

Théorème 3.1 **([29])**. — *La complétion d'une $\mathbb{Z}_p$-algèbre de type fini par rapport à un idéal est excellente.*

La proposition suivante, qui utilise l'excellence, est utile pour définir des schémas formels par normalisation :

Proposition 3.3. — *Soit R un anneau I-adiquement complet, normal, excellent, qui est un quotient d'un anneau régulier. Soit $f \in R$. Alors la complétion I-adique de $R[f^{-1}]$ est normale.*

Démonstration. Voir [**11**], sect. 1.2. □

Soit $A = A_0[1/\alpha]$ et A^+ le normalisé de A_0 dans A. Au schéma formel Spf A_0 on peut associer un espace adique analytique $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. Le caractère noethérien de A_0 nous assure que $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ est bien un espace adique. Au schéma formel $\mathfrak{Y}_r$ on associe l'espace adique analytique $\mathcal{Y}_r = \mathfrak{Y}_r^{ad} \times_{\mathrm{Spa}(A_0,A_0)} \mathrm{Spa}(A, A^+)$ où $\mathfrak{Y}_r^{ad}$ désigne l'adification du schéma formel $\mathfrak{Y}_r$ ([**17**], sect. 4).

On suppose que $\alpha^{p^k} \mid p$. Pour tout $n \leq r + k$, on dispose, d'après le corollaire A.2, d'un sous-groupe canonique $H_n \to \mathfrak{Y}_r$, d'échelon n. De plus, le groupe H_n^D est étale au dessus de la fibre analytique $\mathcal{Y}_r$. Soit $\mathcal{IG}_{n,r} \to \mathcal{Y}_r$ le revêtement fini étale qui paramètre les isomorphismes $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D$. C'est un revêtement galoisien de groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. On définit alors $\mathfrak{IG}_{n,r} \to \mathfrak{Y}_r$ comme la normalisation de $\mathfrak{Y}_r$ dans $\mathcal{IG}_{n,r}$.

Lemme 3.1. — *La normalisation $\mathfrak{IG}_{n,r}$ est bien définie. Le morphisme $\mathfrak{IG}_{n,r} \to \mathfrak{Y}_r$ est fini.*

Démonstration. Soit Spf R un ouvert formel de $\mathfrak{Y}_r$. Soit $R'[1/\alpha]$ (la notation est ambigüe pour l'instant car R' n'est pas encore défini) l'anneau de $\mathcal{IG}_{n,r}$ au dessus de $\mathrm{Spa}(R, R)^{an}$. Par hypothèse $R'[1/\alpha]$ est une $R[1/\alpha]$-algèbre finie étale. Soit R' le normalisé de R dans $R[1/\alpha]$. Le caractère excellent de R nous assure que R' est finie sur R. L'ouvert de $\mathfrak{IG}_{n,r}$ au dessus de Spf R est par définition Spf R'. Pour voir que la construction a un sens, nous devons montrer que si $f \in R$ alors $R'\langle 1/f\rangle$ est le normalisé de $R\langle 1/f\rangle$ dans $R'[1/\alpha] \otimes_R R\langle 1/f\rangle$ (qui est l'anneau des fonction sur la fibre dans $\mathcal{IG}_{n,r}$ de $\mathrm{Spa}(R\langle 1/f\rangle, R\langle 1/f\rangle)^{an}$). Comme $R\langle 1/f\rangle$ est plat sur R, $R'\langle 1/f\rangle = R' \otimes_R R\langle 1/f\rangle$ est bien un sous-anneau de $R'[1/\alpha] \otimes_R R\langle 1/f\rangle$. Il est normal d'après la proposition 3.3 et fini sur $R\langle 1/f\rangle$. □

Les différentes tour d'Igusa partielles s'organisent en une suite

$$\mathfrak{IG}_{r+k,r} \to \mathfrak{IG}_{r+k-1,r} \to \cdots \to \mathfrak{Y}_r$$

de morphismes finis, équivariants pour l'action de $\mathbb{Z}/p^{r+k}\mathbb{Z}^\times$.

3.2.2. Ramification de la tour d'Igusa partielle. — Le morphisme $h : \mathfrak{IG}_{n,r} \to \mathfrak{IG}_{n-1,r}$ est fini et étale en fibre analytique. On a donc une trace $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}} : h_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,r}}$.

Proposition 3.4. — *Pour tout $n \geq 2$, on a*

$$\mathrm{Hdg}^{p^{n-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,r}} \subset \mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(h_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}}).$$

Pour $n = 1$, $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(h_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{1,r}}) = \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_r}$.

Démonstration. Pour $n = 1$, l'énoncé est clair car le morphisme est de degré $p-1$ premier à p. Soit Spf R un ouvert affine de $\mathfrak{Y}_r$. Supposons que Hdg est trivial sur cet ouvert, engendré par $\tilde{\mathrm{Ha}}$. Soit Spf B_n et Spf B_{n-1} les fibres de H_n^D et H_{n-1}^D au dessus de Spf R. Soit Spf C la fibre du quotient $(H_n/H_{n-1})^D$ sur Spf R. Le morphisme $H_n^D \to H_{n-1}^D$ est un espace homogène sous $(H_n/H_{n-1})^D$ pour la topologie $fppf$. Soit $D_{B_n/B_{n-1}}$ la différente du morphisme $B_{n-1} \to B_n$ et $D_{C/R}$ celle du morphisme $R \to C$. On a l'égalite :

$$D_{B_n/B_{n-1}} \otimes_{B_{n-1}} B_n = D_{C/R} \otimes_R B_n$$

de $B_n \otimes_{B_{n-1}} B_n = C \otimes_R B_n$-modules. Par ailleurs, on a $D_{C/R} = \mathrm{Hdg}^{p^{n-1}} C$ d'après le corollaire A.2 et le lien entre discriminant et différente (voir [**12**], sect. 1 et 2.). Par descente fidèlement plate, il en résulte que $D_{B_n/B_{n-1}} = \mathrm{Hdg}^{p^{n-1}} B_n$. On a un isomorphisme $D^{-1}_{B_n/B_{n-1}} \to \mathrm{Hom}_{B_{n-1}}(B_n, B_{n-1})$ donné par $x \mapsto \mathrm{Tr}_{B_n/B_{n-1}}(x\ \cdot)$. Vérifions que l'idéal $\mathrm{Tr}(D^{-1}_{B_n/B_{n-1}}) \subset B_{n-1}$ est B_{n-1}. La propriété est locale pour la topologie de Zariski sur Spec B_{n-1} donc on peut supposer que B_n est un module libre sur B_{n-1}. On possède donc une application surjective $B_n \to B_{n-1}$ de B_{n-1}-modules qui s'écrit $\mathrm{Tr}(x.)$ pour $x \in D^{-1}_{B_n/B_{n-1}}$ et donc $\mathrm{Tr}(D^{-1}_{B_n/B_{n-1}}) = B_{n-1}$. Par conséquent, on peut trouver un élément $d_n \in B_n$ tel que $\mathrm{Tr}_{B_n/B_{n-1}}(d_n) = \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{n-1}}$. Pour tout $n \geq 1$, on une immersion ouverte de $\mathcal{Y}_r$-espaces adiques analytiques $\mathcal{IG}_{n,r} \hookrightarrow H_n^D$. De plus, pour tout $n \geq 2$, on a un diagramme cartésien au dessus de $\mathcal{Y}_r$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{IG}_{n,r} \arrow[r] \arrow[d] & H_n^D \arrow[d] \\
\mathcal{IG}_{n-1,r} \arrow[r] & H_{n-1}^D
\end{tikzcd}$$

On peut donc tirer les sections d_n en des éléments $d'_n \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}}(\mathrm{Spf}\ R)$ qui vérifient $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(d'_n) = \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{n-1}}$. □

Corollaire 3.1. — *Soit* Spf R *un ouvert de* $\mathfrak{Y}_r$ *au dessus duquel le faisceau* Hdg *est trivial, engendré par un élément* $\tilde{\mathrm{Ha}}$. *Il existe alors, pour tout* $0 \leq n \leq r+k$ *des élément* $c_0 = 1$, $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r}}(\mathrm{Spf}\ R)$ *pour* $n \geq 1$ *tels que et* $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$ *pour tout* $n \geq 1$.

3.2.3. Fonctorialité pour le Frobenius. — On suppose toujours $p \in \alpha^{p^k} A_0$ et $n \leq r+k$. Rappelons qu'on possède un morphisme de Frobenius $\phi : \mathfrak{Y}_{r+1} \to \mathfrak{Y}_r$.

Proposition 3.5. — *On possède un morphisme naturel,* $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$*-équivariant,* $\phi : \mathfrak{IG}_{n,r+1} \to \mathfrak{IG}_{n,r}$*, au dessus du morphisme précédent.*

Démonstration. Commençons par construire un morphisme $\phi : \mathcal{IG}_{n,r+1} \to \mathcal{IG}_{n,r}$. Soit (R, R^+) une algèbre affinoide et $x : \mathrm{Spa}(R, R^+) \to \mathcal{IG}_{n,r+1}$ un point. Soit $E \to R$ le schéma semi-abélien correspondant. Il possède un sous-groupe canonique H_m d'échelon $m \leq k+r+1$ ainsi qu'une trivialisation $\psi : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D$. Soit $E' = E/H_1$ et H'_n le sous-groupe canonique de E' d'échelon n. On a un isomorphisme canonique (qui existe aussi au niveau entier) $H'_n \simeq H_{n+1}/H_1$. Par ailleurs, la multiplication par p dans H_{n+1} se factorise en un isomorphisme $H_{n+1}/H_1 \simeq H_n$ (qui n'est pas un isomorphisme entier en général). On possède donc un isomorphisme $H'_n \simeq H_n$ et en composant le dual de cet isomorphisme et ψ, on obtient la trivialisation $\psi' : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to (H'_n)^D$. Le morphisme ϕ

associe à (E,ψ) le couple (E',ψ'). Par normalisation, le morphisme se prolonge au niveau entier. $\square$

3.3. Application et notation. — Ce numéro rassemble la plupart des notations utilisées dans l'article.

3.3.1. L'espace des poids. — Soit $I=[p^k,p^{k'}]$ avec $k,k'\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{+\infty\}$ ou $I=[0,1]$. On note $B_I=\mathrm{H}^0(\mathcal{W}_I^0,\mathcal{O}^+_{\mathcal{W}^0})$. Explicitons l'anneau B_I (on pourra utiliser le critère de Serre pour vérifier que ces anneaux sont intégralement clos) :

1. Si $k,k'\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $B_I=\mathbb{Z}_p[[T]]\langle u,v\rangle/(up-T^{p^k},T^{p^{k'}}v-p)$,
2. Si $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k'=+\infty$, $B_I=\mathbb{Z}_p[[T]]\langle u\rangle/(pu-T^{p^k})$,
3. Si $k,k'=+\infty$, $B_I=\mathbb{F}_p[[T]]$,
4. Si $I=[0,1]$, $B_I=\mathbb{Z}_p[[T]]\langle v\rangle/(Tv-p)$.

Soit $\mathfrak{W}_I^0=$ Spf B_I avec B_I est munit de la topologie (p,T) adique. La fibre analytique de $\mathfrak{W}_I^0$ est $\mathcal{W}_I^0$. On note $\mathfrak{W}_I=\mathrm{Spf}\ B_I[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]$. Sa fibre analytique vaut $\mathcal{W}_I$.

3.3.2. Les courbes modulaires. — On rappelle que $\mathfrak{X}$ est la courbe modulaire sur Spf $\mathbb{Z}_p$. Pour tout intervalle rationnel $I\subset[0,\infty]$, on note $\mathcal{X}_I=\mathfrak{X}\times_{\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p}\mathcal{W}_I^0$ et $\mathcal{M}_I=\mathfrak{X}\times_{\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p}\mathcal{W}_I$. On note $\mathcal{M}_{ord,I}$ (resp. $\mathcal{X}_{ord,I}$) l'ouvert ordinaire de $\mathcal{M}_I$ (resp. $\mathcal{X}_I$) définit par $|\mathrm{Ha}|=1$.

Pour tout $r\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{M}_{r,I}$ (resp. $\mathcal{X}_{r,I}$) l'ouvert de $\mathcal{M}_I$ (resp. $\mathcal{X}_I$) donné par la condition :

$$|\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}}|\geq\sup\{|p|,|T|\}$$

où $\tilde{\mathrm{Ha}}$ désigne un relèvement local de l'invariant de Hasse. L'ouvert $\mathcal{M}_{r,I}$ peut être vue comme une famille de voisinages stricts du lieu ordinaire paramétrés par l'espace $\mathcal{W}$. Sur l'espace $\mathcal{M}_{r,[0,\infty[}$, à mesure qu'on s'approche du bord les voisinages, vus pour la topologie p-adique, se rétrécissent. Pour tout intervalle I comme dans le paragraphe précédent, on note $\mathfrak{X}_I=\mathfrak{X}\times_{\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p}\mathfrak{W}_I^0$ et $\mathfrak{M}_I=\mathfrak{X}\times_{\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p}\mathfrak{W}_I$. On applique la construction du paragraphe 3.1 avec $A_0=B_I$ et $\alpha=T$ dans les cas où $I=[p^k,p^{k'}]$ avec $k\geq 0$, et avec $\alpha=p$ si $I=[0,1]$. On note $\mathfrak{X}_{r,I}:=\mathfrak{Y}_r$ pour ces choix. C'est donc un ouvert d'un éclaté de $\mathfrak{X}_I$. On remarque que $\mathcal{X}_{r,I}$ est l'espace adique fibre analytique de $\mathfrak{X}_{r,I}$. On note $\mathfrak{M}_{r,I}=\mathfrak{X}_{r,I}\otimes_{\mathfrak{W}_I^0}\mathfrak{W}_I$, et on observe que $\mathcal{M}_{r,I}$ est sa fibre analytique.

3.3.3. La tour d'Igusa. — On vérifie sans peine que $\mathfrak{X}_{r,I}$ est excellent, normal, localement le spectre formel d'un quotient d'un anneau régulier. De plus, on dispose sur $\mathfrak{X}_{r,I}$ d'un sous-groupe canonique d'échelon $n\leq k+r$ dès que $I\subset[p^k,\infty]$. On peut alors définir la tour d'Igusa partielle comme au numéro 3.2, $\mathfrak{IG}_{n,r,I}\to\mathfrak{X}_{r,I}$. On note $\mathcal{IG}_{n,r,I}$ l'espace adique fibre analytique de $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$.

4. Formes modulaires surconvergentes en caractéristique p

Dans cette partie, nous construisons des espaces de formes surconvergentes en caractéristique p.

4.1. Courbe modulaire en caractéristique p. — Soit $\bar{X}\to\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p$ la courbe modulaire compactifiée de niveau N premier à p, soit Ha l'invariant de Hasse et Hdg l'idéal de Hodge. Soit $\bar{X}_{ord}$ l'ouvert ordinaire. On rappelle que $\mathfrak{W}_{\{\infty\}}=\mathrm{Spf}\ \mathbb{F}_p[[T]]$. On note $\bar{\kappa}:\mathbb{Z}_p^\times\to\mathbb{F}_p[[T]]^\times$ le caractère qui est trivial sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$ et qui envoie $1+q$ sur $1+T$. Pour tout caractère $\chi:\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$, on note $\bar{\chi}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ et $\bar{\kappa}_\chi$ le caractère $\bar{\kappa}\otimes\bar{\chi}$.

Soit $\mathfrak{X}_{\{\infty\}} = \bar{X} \times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p} \mathfrak{W}_{\{\infty\}}$ et $\mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}} = \bar{X}_{ord} \times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p} \mathfrak{W}_{\{\infty\}}$ On a construit (voir les numéros 3.1 et 3.3) un schéma formel $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{\{\infty\}}$ pour tout entier $r \geq 0$. Soit $\mathcal{X}_{\{\infty\}}$, $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$ les espaces adiques sur $\mathcal{W}^0_{\{\infty\}} = \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_p((T)), \mathbb{F}_p[[T]])$, fibres génériques de $\mathfrak{X}_{\{\infty\}}$ et $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$. Ainsi, $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$ est l'ouvert de $\mathcal{X}_{\{\infty\}}$ d'équation $|\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}| \geq |T|$.

Pour tout $n \geq 0$, on dispose sur $\bar{X}$, $\mathfrak{X}_{\{\infty\}}$, $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ et $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$ d'un sous-groupe canonique H_n d'ordre n : le noyau de F^n.

4.2. L'équivalence de Katz. — Soit $\bar{IG}_{n,ord} \to \bar{X}_{ord}$ l'espace de modules des trivialisations de H_n^D. C'est un revêtement étale de $\bar{X}_{ord}$ de groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Soit $\bar{IG}_{\infty,ord} = \lim_n \bar{IG}_{n,ord}$. Soit $\bar{IG}_n$ le normalisé de $\bar{X}$ dans $\bar{IG}_{ord,n}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, soit $\mathfrak{IG}_{n,ord,\{\infty\}}$ le produit fibré : $\bar{IG}_{n,ord} \times_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p} \mathfrak{W}^0_{\{\infty\}}$.

Pour tout caractère $\bar{\kappa}_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$, on possède, d'après [**20**], un faisceau inversible $\omega^{\bar{\kappa}_\chi} = \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,ord,\{\infty\}}}[\bar{\kappa}_\chi^{-1}]$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}}}$-modules. De plus, le Frobenius de $\mathfrak{IG}_{\infty,ord,\{\infty\}}$ induit un isomorphisme $\phi^\star\omega^{\bar{\kappa}_\chi} \simeq \omega^{\bar{\kappa}_\chi}$.

4.3. Tour d'Igusa surconvergente. — Soit $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ la tour d'Igusa partielle. On a des morphismes de transition finis : $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}} \to \mathfrak{IG}_{n-1,r,\{\infty\}}$. Soit $\mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}$ la limite projective de ces morphismes dans la catégorie des schémas formels T-adiques. Nous allons donner une description simple et une interprétation modulaire de ces tours d'Igusa. La proposition suivante donne une interprétation modulaire de $\bar{IG}_n$.

Proposition 4.1. — *Soit R une $\mathbb{F}_p$-algèbre normale. Soit $x \in X(R)$ correspondant à schéma semi-abélien E/R tel que $Ha(x) \in R$ ne soit pas nul. Alors $\bar{IG}_n|_x(R)$ est l'ensemble des morphismes de schémas en groupes $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H_n^D$ qui sont des isomorphismes au dessus de* Spec $R[1/Ha]$.

Soit alors $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r}$ le produit fibré : $\bar{IG}_n \times_{\bar{X}} \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$.

Lemme 4.1. — *On possède un isomorphisme canonique $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r} \simeq \mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}}$.*

Démonstration. Les schémas formels $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r}$ et $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}}$ sont finis sur $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ et ils ont clairement même fibre générique $\mathcal{IG}_{n,r,\{\infty\}}$. Il suffit donc de voir que $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r}$ est normale. Si Spec A est un ouvert affine de $\bar{X}$, Spec A_n l'ouvert affine de $\bar{IG}_n$ au dessus, alors le tube de Spec A dans $\bar{\mathfrak{IG}}_{n,r}$ est Spf $A_n[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\rangle$. L'anneau A_n est régulier et le morphisme $A_n \to A_n[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\rangle$ est régulier, donc $A_n[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\rangle$ est régulier et donc normal. $\square$

Proposition 4.2. —
1. *Pour tout $\mathbb{F}_p[[T]]$-algèbre R normale, plate, T-adiquement complète, $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}}(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes (x, η, ψ_n) où $x \in \bar{X}(R)$ correspond à un schéma semi-abélien E/R, $\eta \in \omega_E^{-(p-1)p^{r+1}}$ vérifie $Ha^{p^{r+1}}\eta = T$ et $\psi_n : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H_n^D$ est un morphisme qui est un isomorphisme au dessus de* Spec $R[1/\mathrm{Ha}]$.
2. *Pour tout $\mathbb{F}_p[[T]]$-algèbre R normale, plate, T-adiquement complète, $\mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes (x, η, ψ) où (x, η) sont comme au dessus et $\psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{colim} H_n^D$ est un morphisme qui est un ismomorphisme au dessus de* Spec $R[1/\mathrm{Ha}]$.

4.4. Surconvergence de l'équivalence de Katz. — Dans ce numéro, nous allons montrer que la construction de Katz garde un sens dans un voisinage du lieu ordinaire et qu'elle fournit les bons objets.

4.4.1. Le faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$. — Le but de ce paragraphe est de montrer que le faisceau $\omega^{\bar{\kappa}_\chi}$ peut se réaliser sur $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ au lieu de $\mathfrak{X}_{ord,\{\infty\}}$. Commençons par un lemme sur la ramification du morphisme $h_{n+1} : \bar{IG}_{n+1} \to \bar{IG}_n$ (avec la convention $\bar{IG}_0 = \bar{X}$). Notons $\mathrm{Tr}_{IG} : (h_{n+1})_\star \mathscr{O}_{\bar{IG}_{n+1}} \to \mathscr{O}_{\bar{IG}_n}$ la trace de ce morphisme.

Lemme 4.2. — *On a* $\mathrm{Tr}_{IG}\big((h_1) \star \mathscr{O}_{\bar{IG}_1}\big) = \mathscr{O}_{\bar{X}}$ *et pour tout* $n \geq 1$, *on a* $\mathrm{Hdg}^{p^n} \subset \mathrm{Tr}_{IG}\big((h_{n+1}) \star \mathscr{O}_{\bar{IG}_{n+1}}\big)$.

Démonstration. C'est analogue (en plus simple) à la démonstration de la proposition 3.4. □

Corollaire 4.1. — *Soit* Spec A *un ouvert de* $\bar{X}$ *sur lequel le faisceau* Hdg *est trivial. Notons (en faisant un petit abus de notation)* Ha *un générateur. Alors il existe une suite d'éléments* $c_0 = 1$, $c_n \in \mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} \mathscr{O}_{\bar{IG}_n}(\mathrm{Spec}\ A)$ *pour* $n \geq 1$ *tels que* $\mathrm{Tr}_{IG}(c_n) = c_{n-1}$.

Définissons alors $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$ comme le sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}}$ des fonctions $\bar{\kappa}^{-1}$-variantes pour l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$.

Théorème 4.1. — *Le faisceau* $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$ *est un faisceau inversible sur* $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ *pour* $r \geq 2$.

Démonstration. On peut travailler localement pour la topologie de Zariski sur $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$. Soit donc Spec A un ouvert de $\bar{X}$, supposons ω libre sur Spec A et identifions l'invariant de Hasse Ha avec un scalaire. Soit Spec A_n l'image inverse de Spec A dans $\bar{IG}_n$, Spf $A_n[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\rangle$ l'ouvert correspondant dans $\mathfrak{IG}_{n,r,\{\infty\}}$ et Spf $A_\infty[[T]]\langle T/Ha^{p^{r+1}}\rangle$ l'ouvert correspondant dans $\mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}$. On a noté $A_\infty = \mathrm{colim}_n A_n$.

Comme $(A_n)^{(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} = A$, $(A_\infty)^{\mathbb{Z}_p^\times} = A$ et donc $(A_\infty[[T]]\langle T/Ha^{p^k}\rangle)^{(\mathbb{Z}_p)^\times} = A[[T]]\langle T/Ha^{p^{r+1}}\rangle$. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de trouver un élément inversible $x \in A_\infty[[T]]\langle T/Ha^{p^{r+1}}\rangle$ tel que $\sigma(x) = \bar{\kappa}^{-1}(\sigma).x$ pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}_p^\times$.

D'après le corollaire 4.1, il existe des éléments $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{p-1}$, $c_n \in \mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} A_n$ vérifiant $Tr_{A_n/A_{n-1}}(c_n) = c_{n-1}$.

Définissons alors $b_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$ $b_n = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \bar{\kappa}(\tilde{\sigma})\tilde{\sigma}.c_n \in \mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} A_n[[T]]$ où $\tilde{\sigma} \in \mathbb{Z}_p^\times$ est un relèvement de $\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Soit $\tilde{\sigma}'$ un autre choix de relèvements de σ donnant un autre élément b'_n. Grace au lemme 2.3, on voit facilement que :

- $b_n = b'_n \mod T^{p^{n-2}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}}$ si $n \geq 2$ et $p \geq 3$ ou $n = 2$ et $p = 2$,
- $b_n = b'_n \mod T^{p^{n-3}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}}$ si $n \geq 3$ et $p = 2$,
- $b_n = b'_n \mod T$ si $n = 0$ et 1.

On vérifie également par récurrence que :

- $b_n - b_{n-1} \in T^{p^{n-2}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} A_n[[T]]$ si $n \geq 2$ et $p \neq 2$ ou $n = 2$ et $p = 2$,
- $b_n - b_{n-1} \in T^{p^{n-3}}\mathrm{Ha}^{-\frac{p^n-p}{p-1}} A_n[[T]]$ si $n \geq 3$ et $p = 2$,
- $b_1 - 1 \in TA[[T]]$,

Indiquons la démonstration dans le cas $n \geq 2$ et $p \neq 2$, les autres cas se déduisent sans problème. On a

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \bar\kappa(\tilde\sigma)\sigma.c_n \\ &= \sum_{\tau\in(\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \bar\kappa(\tilde\tau).\tilde\tau\big(\sum_{\sigma\in 1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \bar\kappa(\tilde\sigma)\sigma.c_n\big) \\ &= \sum_{\tau\in(\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})^\times} \bar\kappa(\tilde\tau).\tilde\tau\big(c_{n-1} + \sum_{\sigma\in 1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} (\bar\kappa(\tilde\sigma-1)\sigma.c_n\big) \end{aligned}$$

Pour $\sigma \in 1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $\bar\kappa(\tilde\sigma)-1 \in T^{p^{n-2}}\mathbb{F}_p[[T]]$ et on applique l'hypothèse de récurrence à c_{n-1}. En passant à la limite, on obtient alors un élément $b_\infty \in A_\infty[[T/\mathrm{Ha}^{p^2}]] \subset A_\infty[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^3}\rangle$ (resp. $b_\infty \in A_\infty[[T]]\langle T/Ha^{p^4}\rangle$ si $p=2$) car

$$\frac{T^{p^{n-2}}}{\mathrm{Ha}^{p^n}} = T^{p^{n-3}(p-1)}\big(\frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^3}}\big)^{p^{n-3}}.$$

Par construction, $\sigma.b_\infty = \bar\kappa^{-1}(\sigma).b_\infty$. Enfin, $b_\infty - 1 \in \frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^3}}A_\infty[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^3}\rangle$ (resp.$b_\infty - 1 \in \frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^4}}A_\infty[[T]]\langle T/\mathrm{Ha}^{p^4}\rangle$ si $p=2$. Comme $\frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^3}}$ (resp. $\frac{T}{\mathrm{Ha}^{p^4}}$ si $p=2$) est topologiquement nilpotent, il en résulte que b_∞ est inversible. □

4.4.2. Le faisceau des formes de poids $\bar\kappa_\chi$. — Rappelons que $\chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ est un caractère et que $\bar\kappa_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ désigne le caractère que envoie $1+q$ sur $1+T$ et qui vaut la réduction de $\bar\chi$ de χ sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times$. Supposons $p\neq 2$ pour un instant. Soit $h_1 : \bar{IG}_1 \to X$ Soit $\bar\omega^{\bar\chi} := (h_1)_\star\mathcal{O}_{\bar{IG}_1}[\bar\chi^{-1}]$ le faisceau cohérent sur $\bar X$.

Lemme 4.3. — *Le faisceau $\bar\omega^{\bar\chi}$ est inversible.*

Démonstration. Le faisceau $\bar\omega^{\bar\chi}$ est cohérent et sans torsion donc projectif. On calcul son rang sur le lieu ordinaire, et il vaut évidemment 1. □

Si $p=2$ alors le caractère résiduel $\bar\chi$ est trivial et $\bar\omega^{\bar\chi}$ est par définition le faisceau trivial.

On note $\mathfrak{w}^{\bar\chi}$ l'image inverse de $\bar\omega^{\bar\chi}$ sur $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ pour tout r. On pose alors $\mathfrak{w}^{\bar\kappa_\chi} = \mathfrak{w}_{\{\infty\}}\otimes\mathfrak{w}^{\bar\chi}$. On note $\omega^{\bar\kappa_\chi}$ le faisceau inversible sur $\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}$.

Définition 4.1. — *Une forme r-surconvergente entière de poids $\bar\kappa_\chi$ est une section globale du faisceau inversible $\mathfrak{w}^{\bar\kappa_\chi}$. Une forme surconvergente de poids $\bar\kappa_\chi$ est une section de $\omega^{\bar\kappa_\chi}$ sur $\mathcal{X}_{ord,\{\infty\}}$ qui surconverge sur un voisinage $\mathcal{X}_r$.*

On note $M^\dagger_{\bar\kappa_\chi}$ le $\mathbb{F}_p((T))$- espace des formes surconvergentes de poids $\bar\kappa_\chi$.

4.4.3. Description modulaire. — Une forme r-surconvergente entière f de poids $\bar\kappa_\chi$ est un loi fonctorielle qui à

1. une $\mathbb{F}_p[[T]]$-algèbre T-adiquement complète, normale, plate R,
2. $x\in X(R)$ correspondant à schéma semi-abélien E/R ,
3. $\eta \in \omega_E^{-(p-1)p^{r+1}}$ qui vérifie $\mathrm{Ha}^{p^{r+1}}\eta = T$,
4. une trivialisation $\psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{colim}_n H_n^D|_{R[1/\mathrm{Ha}]}$,

associe un élément de $f(x,\eta,\psi)\in R$ tel que $f(x,\eta,\sigma.\psi) = \bar\kappa_\chi^{-1}(\sigma)f(x,\eta,\psi)$ pour tout $\sigma\in\mathbb{Z}_p^\times$.

4.4.4. Fonctorialité à la restriction. — Soit $r' \geq r \geq 2$ (resp $r \geq 3$ si $p = 2$). On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{IG}_{\infty,r',\{\infty\}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}} \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_{r',\{\infty\}} \arrow[r, "i"] & \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}} \end{tikzcd}$$

qui induit des immersions ouvertes sur la fibre générique. Le morphisme $\mathfrak{IG}_{\infty,r',\{\infty\}} \to \mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}$ est équivariant sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times$. Par conséquent, on dispose d'un morphisme canonique $i^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}} \to \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}}$.

Proposition 4.3. — *Le morphisme précédent est un isomorphisme.*

Démonstration. Tensorisons le morphisme $i^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}} \to \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}}$ par $(i^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}})^{-1}$. Le faisceau $(i^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}})^{-1} \otimes \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}}$ s'identifie au sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,r',\{\infty\}}}$ des sections invariantes sous $\mathbb{Z}_p^\times$, lequel est égal à $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',\{\infty\}}}$. □

4.4.5. Fonctorialité pour le Frobenius et opérateur U_p. — Soit E le schéma semi-abélien universel sur $\bar{X}$. On dispose aussi d'un morphisme de Frobenius $F : E \to E/H_1 = E^{(p)}$. Ce morphisme induit des injections $F^D : H_n(E')^D \to H_{n+1}(E)^D$ puis un morphisme injectif $F^D : \mathrm{colim}_n H_n(E')^D \to \mathrm{colim}_n H_n(E)^D$ qui est un isomorphisme sur le lieu ordinaire. On en déduit une application : $\phi : \mathfrak{X}_{r+1,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ que l'on peut étendre en une application $\phi : \mathfrak{IG}_{\infty,r+1,\{\infty\}} \to \mathfrak{IG}_{\infty,r,\{\infty\}}$, donnée par la règle suivante : A tout morphisme $\psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{colim}_n H_n(E)^D$, on associe le morphisme ψ' définit sur le lieu ordinaire par $(F^D)^{-1} \circ \psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{colim}_n H_n(E')^D$ et qui se prolonge partout par normalité.

Si $i : \mathfrak{X}_{r+1,\{\infty\}} \to \mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ désigne le morphisme de la section précédente, alors on a un morphisme canonique $i^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}} \to \phi^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}}$.

Proposition 4.4. — *Le morphisme $i^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}} \to \phi^\star \mathfrak{w}^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Similaire à la démonstration précédente. □

Admettons provisoirement qu'on peut définir un morphisme $p^{-1}\mathrm{Tr}_\phi : \phi_\star \mathscr{O}_{\mathcal{X}_{r+1,\{\infty\}}} \to \mathscr{O}_{\mathcal{X}_{r,\{\infty\}}}$. On définit alors l'opérateur U_p par la règle :

$$U_p : \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_r, \omega^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_{r+1}, i^\star \omega^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}}) \simeq \mathcal{X}_{r+1}, \phi^\star \omega^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}}) \overset{p^{-1}\mathrm{Tr}_\phi}{\to} \mathrm{H}^0(\mathcal{X}_r, \omega^{\bar{\kappa}_\mathcal{X}}).$$

Cet opérateur est compact et il possède donc une série caractéristique.

4.4.6. Action du reste de l'algèbre de Hecke. — L'action de l'algèbre de Hecke hors p peut être définie sans problème, de façon géométrique, comme dans le cas des espaces de formes modulaires classiques.

5. Famille universelle de faisceaux sur l'espace rigide

L'objectif de cette section est de construire une famille de faisceaux modulaires sur l'espace adique $\mathcal{W}_{[0,\infty[}$, ainsi que des modèles entiers. La famille de faisceaux sur $\mathcal{W}_{[0,\infty[}$ a été construite dans [**1**] et [**25**]. La nouveauté ici est que nous construisons des modèles entiers inversibles canoniques pour ces faisceaux .

5.1. Résultats principaux. — On renvoie au numéro 3.3 pour la définition des objets considérés. Dans cette partie, $I = [0,1]$ ou $[p^k, p^{k'}]$ pour $k, k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

5.1.1. En géométrie formelle. — Le résultat principal de cette partie est le suivant. Sa démonstration fait l'objet des numéros 5.2, 5.3 et 5.4.

Théorème 5.1. — *Supposons $r \geq 1$ et $r+k \geq k'+2$ (resp. $r \geq 2$ et $r+k \geq k'+4$ si $p=2$). Alors on possède un faisceau inversible $\mathfrak{w}_I$ sur $\mathfrak{X}_{r,I}$. Ce faisceau jouit des propriétés suivantes :*

1. *Soit $\mathcal{X}_{r,I}$ l'espace adique sur $\mathbb{Q}_p$ fibre générique de $\mathfrak{X}_{r,I}$. Le faisceau fibre générique de $\mathfrak{w}_I$ est le faisceau des formes surconvergentes sur $\mathcal{W}_I^0$ construit dans* [**1**] *et* [**25**].
2. *On a un opérateur de Frobenius :*
$$i^\star \mathfrak{w}_I \simeq \phi^\star \mathfrak{w}_I$$
ou $i : \mathfrak{X}_{r+1,I} \to \mathfrak{X}_{r-1,I}$ est le morphisme d'inclusion et $\phi : \mathfrak{X}_{r+1,I} \to \mathfrak{X}_{r,I}$ est le Frobenius.
3. *La construction est fonctorielle en l'intervalle I : si $I' \subset I$, et si $i_{I',I} : \mathfrak{X}_{r,I'} \to \mathfrak{X}_{r,I}$ est le morphisme naturel alors $i^\star_{I',I}\mathfrak{w}_I = \mathfrak{w}_{I'}$.*

5.1.2. En géométrie analytique. — On renvoie toujours au numéro 3.3 pour les définitions des objets intervenant ci-dessous. La proposition suivante résulte du corollaire A.2 et de la proposition 3.2.

Proposition 5.1. — *Sur l'ouvert $\mathcal{M}_r$ on dispose d'un sous-groupe canonique d'ordre r. Sur l'ouvert $\mathcal{M}_{r,[p^k,\infty]}$, on dispose même d'un sous-groupe canonique d'ordre $r+k$. On dispose d'inclusions évidentes $i : \mathcal{M}_{r+1} \hookrightarrow \mathcal{M}_r$ et de morphismes de Frobenius $\phi : \mathcal{M}_{r+1} \to \mathcal{M}_r$.*

Le théorème suivant est essentielle la traduction analytique du théorème 5.1.

Théorème 5.2. — *Pour tout $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p=2$), on possède un faisceau inversible $\omega^\kappa_{[0,\infty[}$ sur l'espace $\mathcal{M}_{r,[0,\infty[}$, ainsi qu'un sous-faisceau $\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[}$ de $\mathscr{O}^+_{\mathcal{M}_{r,[0,\infty[}}$-modules. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *La restriction du sous-faisceau $\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[}$ à la composante libre $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$ est un faisceau inversible de $\mathscr{O}^+_{\mathcal{X}_{r,[0,\infty[}}$-module.*
2. *Pour tout caractère localement algébrique $\chi.k : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ avec χ un caractère fini et $k \in \mathbb{Z}$ identifié à un point de $\mathcal{W}^{rig}$, $\omega^\kappa_{[0,\infty[}|_{\{\chi.k\}} = \omega^k(\chi)$ est le faisceau usuel des formes modulaires de poids k et nebentypus χ.*
3. *Le morphisme de Frobenius $\phi : \mathcal{M}_{r+1} \to \mathcal{M}_r$ et l'inclusion $i : \mathcal{M}_{r+1} \to \mathcal{M}_r$ induisent des isomorphismes $\phi^\star\omega^\kappa_{[0,\infty[} \simeq i^\star\omega^\kappa_{[0,\infty[}$. Si on se restreint à $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$, on a même des isomorphismes au niveau entier $\phi^\star\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[} \simeq i^\star\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[}$.*

Démonstration. Expliquons rapidement comment se ramener à travailler sur la composante libre $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$. On possède un revêtement $f : \mathcal{IG}_{1,r} \to \mathcal{X}_r$ qui paramètre les trivialisations du sous-groupe canonique dual H_1^D (pour $p=2$, on prend $f : \mathcal{IG}_{2,r} \to \mathcal{X}_r$, qui paramètre les trivialisations de H_2^D). C'est un torseur sous le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Pour chaque caractère $\chi : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$, on peut considérer le faisceau $(\omega^\chi, \omega^{\chi,+}) = (f_\star\mathscr{O}_{\mathcal{IG}_1}[\chi^{-1}], f_\star\mathscr{O}^+_{\mathcal{IG}_1}[\chi^{-1}])$ où $[\chi^{-1}]$ désigne le sous-faisceau des sections qui se transforment selon le caractère χ^{-1}.

Si on construit un faisceau $(\omega^\kappa_{[0,\infty[}, \omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[})$ ayant les propriétés attendues sur $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$, en tensorisant par les faisceaux $(\omega^\chi, \omega^{\chi,+})$, on étend alors la construction sur $\mathcal{W}^{rig} = \coprod_\chi \mathcal{W}^0_{[0,\infty[}.\chi$.

L'espace $\mathcal{W}^0_{[0,\infty[}$ est recouvert par les ouverts $\mathcal{W}^0_{[0,1]}$ et $\mathcal{W}^0_{[p^k,p^{k+1}]}$ pour $k \geq 0$. Il est donc suffisant de construire les faisceaux sur chacun de ces ouverts et de vérifier qu'ils se recollent. Soit I un des intervalles $[0,1]$ ou $[p^k, p^{k+1}]$.

Considérons le schéma formel $\mathfrak{W}^0_I = \mathrm{Spf}\ B_I$ et le schéma formel $\mathfrak{X}_{r,I} \to \mathfrak{W}^0_I$ qui a pour fibre générique $\mathcal{X}_{r,I}$. Comme $r+k \geq k+1+2$ (resp $\geq k+1+4$ si $p=2$), on possède (thm. 5.1) un faisceau inversible $\mathfrak{w}_I$ sur $\mathfrak{X}_{r,I} \to \mathfrak{W}^0_I$. Celui-ci induit des faisceaux $(\omega^\kappa_I, \omega^{\kappa,+}_I)$ sur $\mathcal{X}_{r,I}$. Les différentes fonctorialités nous permettent de recoller ces faisceaux.

□

5.1.3. Prolongement à l'infini. — Grâce au théorème 5.2, on dispose au dessus de $\mathcal{X}_{r,[0,\infty[}$ d'un couple $(\omega^\kappa_{[0,\infty[}, \omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[})$ de faisceaux cohérents inversibles de $\mathscr{O}_{\mathcal{X}_{r,[0,\infty[}}$ et $\mathscr{O}^+_{\mathcal{X}_{r,[0,\infty[}}$-modules. Soit $j : \mathcal{X}_{r,[1,\infty[} \hookrightarrow \mathcal{X}_{r,[1,\infty]}$ l'immersion ouverte. On voudrait prolonger le faisceau $\omega^\kappa_{[1,\infty[}$ en un faisceau $\omega^\kappa_{[1,\infty]}$ sur $\mathcal{X}_{r,[1,\infty]}$. Le théorème 1.6 de [**22**] qui affirme qu'une fonction bornée sur un ouvert dense de Zariski d'un espace rigide normal se prolonge à tout l'espace. Nous ignorons si ce résultat est valable dans le cadre adique analytique. Dans tous les cas, il est raisonnable de poser $\omega^{\kappa,+}_{[1,\infty]} = j_\star \omega^{\kappa,+}_{[1,\infty[}$ et $\omega^\kappa_{[1,\infty]}$ est le faisceau associé à $\omega^{\kappa,+}_{[1,\infty]}[1/T]$. Pour tout ouvert rationnel V, une section de $\omega^\kappa_{[1,\infty]}$ sur V est donc une section sur bornée de $\omega^\kappa_{[1,\infty[}$ sur $\mathcal{X}_{r,[1,\infty[} \cap \mathcal{V}$. L'exemple suivant montre cependant que ce genre de prolongement est en général pathologique. On vérifiera néanmoins (essentiellement) dans la section 6 que $j_\star \omega^{\kappa,+}_{[1,\infty[}$ est bien localement libre dans notre cas.

Exemple 1. — On pose $\mathcal{S} = \mathcal{W}^0_{[1,\infty]}$ et $\mathcal{U} = \mathcal{W}^0_{[1,\infty[}$. Soit $j : \mathcal{U} \to \mathcal{S}$. On va prendre $\mathscr{F} = \mathscr{O}_\mathcal{U}$, le faisceau trivial. Sur chaque intervalle $[p^k, p^{k+1}]$ on pose $\mathscr{F}^+|_{\mathcal{W}^0_{[p^k,p^{k+1}]}} = \frac{p^{k+1}}{T^{\frac{1-p^{k+1}}{1-p}}} \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}^0_{[p^k,p^{k+1}]}}$. Le faisceau est bien défini, car sur la couronne $|T^{p^k}| = |p|$, on a :

$$|\frac{p^{k+1}}{T^{\frac{1-p^{k+1}}{1-p}}}| = |\frac{p^k}{T^{\frac{1-p^k}{1-p}}}|.$$

Soit $\tilde{\mathscr{F}} = (j_\star \mathscr{F}^+)[1/T]$. Nous prétendons que le faisceau $\tilde{\mathscr{F}}$ est le prolongement par 0 du faisceau $\mathscr{O}_\mathcal{U}$. Soit $r \geq 0$ et soit $f \in j_\star \mathscr{F}^+(\mathcal{W}^0_{[p^r,\infty]})$ une section. Nous allons voir que $f = 0$. Clairement, $f \in \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}^0_{[p^r,\infty]}}$. On étend les scalaires de $\mathbb{Z}_p$ à une extension finie $\mathcal{O}_K$ pour disposer d'un élément ϖ de valuation $1/p^r$. On peut écrire :

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k + \sum_{l=1}^{\infty} b_l (\frac{\varpi}{T})^l$$

Sur chaque couronne $|T^{p^n}| = |p|$, on a par définition $|f| \leq p^{-n+1}$. On obtient alors que :

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq p^{-n+1+\frac{k}{p^n}} \\ |b_l| &\leq p^{-n+1-\frac{l}{p^n}+\frac{l}{p^r}} \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient alors $f = 0$.

5.2. Construction d'un torseur. — Dans cette section, nous construisons un torseur de formes différentielles. Soit ω_E le faisceau conormal du schéma semi-abélien relatif $E \to$

$\mathfrak{X}_{r,I}$. Le noyau du morphisme $\omega_E \to \omega_{H_n}$ vaut $\mathrm{Hdg}^{\frac{p^n-1}{p-1}}\omega_E$. On a alors un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \omega_E \arrow[d] \\ H_n^D \arrow[r, "\mathrm{HT}"] & \omega_{H_n} \arrow[d] \\ & \omega_E/p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}} \end{tikzcd}$$

où HT est l'application de Hodge-Tate et les morphismes verticaux sont surjectifs.

On note $f_n : \mathfrak{F}_{n,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r,I}$ le torseur sous-le groupe $1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a$ défini par $\mathfrak{F}_{n,r,I}(R) = \{\omega \in \omega_E, \omega = \mathrm{HT}(P) \text{ dans } \omega_E/p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\}$. Ici, P désigne l'image de 1 par le morphisme universel $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D$.

On a une action de $\mathbb{Z}_p^\times$ sur $\mathfrak{F}_{n,r,I}$, donnée par $\lambda(\omega, P) = (\lambda\omega, \lambda P)$. Cette action relève l'action de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ sur $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$.

Lemme 5.1. — *Les actions de $\mathbb{Z}_p^\times$ et $(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ sur $\mathfrak{F}_{n,r,k}$ proviennent d'une action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$.*

Démonstration. En effet, on a $\mathbb{Z}_p^\times \cap (1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a) = 1+p^n\mathbb{Z}_p$ car $p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a \cap \mathbb{Z}_p = p^n\mathbb{Z}_p$. Mais les actions de $1 + p^n\mathbb{Z}_p$ vu comme sous-groupe de $\mathbb{Z}_p^\times$ ou de $1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a$ coincident. □

5.3. Le faisceau des familles de formes surconvergentes. — En utilisant le torseur $\mathfrak{F}_{r,n,I}$ nous allons définir le faisceau des familles de formes surconvergentes.

5.3.1. Construction. — Rappelons qu'on dispose d'un accouplement :

$$\mathfrak{W}_I^0 \times \mathbb{Z}_p^\times(1 + p^{k'+1}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{G}_m \;\text{ si }\; p \neq 2$$

et

$$\mathfrak{W}_I^0 \times \mathbb{Z}_p^\times(1 + qp^{k'+1}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{G}_m \;\text{ si }\; p = 2.$$

Nous supposons à présent que $n \geq k' + 2$ (resp. $n \geq k' + 4$ si $p = 2$). On dipose bien alors d'un caractère $\kappa : \mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{G}_m$ qui provient du caractère universel, car $p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a \subset p^{k'+1}\mathbb{G}_a$ (resp. $\subset p^{k'+3}\mathbb{G}_a$ si $p = 2$).

Définissons $\mathfrak{w}^1_{n,r,I} = (f_n)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{n,r,I}}[\kappa^{-1}]$, le sous-faisceau de $(f_n)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{n,r,I}}$ des sections qui se transforment selon le caractère κ^{-1} sous-l'action de $1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a$. C'est un faisceau inversible sur $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$. Soit $\mathfrak{w}_{n,r,I} \subset (g_n)_\star\mathfrak{w}^1_{n,r,I}$ le sous-faisceau de $(g_n \circ f_n)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{n,r,I}}$ constitué des sections κ^{-1}-variantes sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$.

5.3.2. Liberté. — Dans ce numéro, nous démontrons la liberté du faisceau $\mathfrak{w}_{n,r,I}$.

Lemme 5.2. — *Soit $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}})^{00}$ l'idéal des éléments topologiquement nilpotents dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. Supposons que $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$ si $p = 2$). Alors pour tout $1 \leq l \leq r + k$,*

$$\kappa(1 + p^{l-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset \mathrm{Hdg}^{\frac{p^l-p}{p-1}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}})^{00}.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que $\kappa((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times) = 1$ car on s'est restreint à la composante libre de l'espace des poids. Par conséquent, il suffit de traiter les cas $l \geq 2$ si $p \neq 2$ et $l \geq 3$ si $p = 2$. Traitons d'abord le cas $p \neq 2$. Pour $l \geq 2$, on a $\kappa(1+p^{l-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset (T^{p^{l-2}}, p)\Lambda$. Comme $p \in \mathrm{Hdg}^{p^{r+k+1}}A$, pour $l \leq r+k$, $p\mathrm{Hdg}^{-p^l}$ est dans l'idéal des éléments topologiquement nilpotent. Par ailleurs, comme $r \geq 1$, $T \in \mathrm{Hdg}^{p^2}A$ donc $T^{p^{l-2}} \in \mathrm{Hdg}^{p^l}A$. Comme $\frac{p^l-p}{p-1} < p^l$, il en résulte que $T^{p^{l-2}}\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^l-p}{p-1}}$ est dans l'idéal des éléments topologiquement nilpotent. Pour $p = 2$ et $l \geq 3$, on a $\kappa(1+p^{l-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset (T^{p^{l-3}}, p)\Lambda$. Le raisonnement est identique et utilise seulement $r \geq 2$ au lieu de $r \geq 1$. □

Lemme 5.3. — *L'inclusion $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}} \to f_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{n,r,I}}$ induit par passage au quotient un isomorphisme :*

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}/q \to \mathfrak{w}^1_{n,r,I}/q$$

Démonstration. Sur tout ouvert affine de $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$, on a une section du morphisme $\mathfrak{F}_{n,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r,I}$, donnée par le choix d'une forme différentielle $\tilde{\mathrm{HT}}(P)$ qui relève $\mathrm{HT}(P)$. Remarquons que deux sections diffèrent par un élément du groupe $1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a$. On dispose, pour chaque ouvert affine U et pour chaque section $\tilde{\mathrm{HT}}(P)$, d'un isomorphisme $\mathfrak{w}^1_{n,r,k}|_U \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,k}}|_U$, donné par l'évaluation en la section. Réduisant modulo q et utilisant le fait que $\kappa(1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a) \subset 1+q\mathbb{G}_a$, on remarque que l'ambiguité dans le choix de la section disparaît. On obtient donc un morphisme canonique $\mathfrak{w}^1_{n,r,I}/q \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}/q$ qui est l'inverse de l'isomorphisme cherché. □

Soit Spf A un ouvert de $\mathfrak{X}_{r,I}$. On suppose que Hdg est principal sur Spf A, engendré par un élément $\tilde{\mathrm{Ha}}$. D'après le corollaire 3.1, pour tout $0 \leq n \leq r+k$, il existe des éléments

$$c_0 = 1, c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-p}{p-1}}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}(\mathrm{Spf}\ A) \quad \text{si } n \geq 1$$

tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$. Définissons un projecteur pour $r+k \geq n \geq k'+2$ (resp. $n \geq k'+4$) :

$$\begin{aligned} e_{c_n} : (g_n)_\star\mathfrak{w}^1_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A) &\to \tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-p}{p-1}}\mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A) \\ s &\mapsto \sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\sigma)\sigma(c_n s) \end{aligned}$$

Lemme 5.4. — *Supposons $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$ si $p = 2$). Soit $s \in g_\star\mathfrak{w}^1_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ un élément qui vérifie $s = 1 \mod p$ au sens du lemme 5.3. Alors $e_{c_n}(s) \in \mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$. De plus, $\mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ est le A-module libre engendré par $e_{c_n}(s)$.*

Démonstration. On a $s = 1+ph$ pour une section $h \in \mathfrak{F}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$. Il en résulte que

$$e_{c_n}(s) = \sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\sigma)\tilde\sigma(c_n) + p\sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\sigma)\tilde\sigma(c_n h).$$

Dans cette formule, $\tilde\sigma$ est un relèvement arbitraire de σ dans $\mathbb{Z}_p^\times$. Comme $\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+k+1}} \mid p$, il en résulte que $p\sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times}\tilde\sigma(ch) \in A^{00}\mathfrak{F}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ où A^{00} est l'idéal des éléments topologiquement nilpotent dans A. .

Montrons que

$$\sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde\sigma)\tilde\sigma(c_n) \in 1 + A^{00}\mathfrak{F}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A).$$

Nous allons en fait vérifier par récurrence sur $0 \leq l \leq k+r$ que $\sum_{\sigma\in(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\tilde{\sigma}(c_l) \in 1 + A^{00}\mathfrak{F}_{l,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ pour n'importe quel relèvement $\tilde{\sigma}$ de σ. Pour $l = 0$, on a $c_0 = 1$ et c'est trivialement vrai. Sinon, on écrit

$$\sum_{\sigma\in 1+p^{l-1}\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma(c_l) = c_{l-1} + \sum_{\sigma\in 1+p^{l-1}\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}} (\kappa(\tilde{\sigma})-1)\sigma(c_l)$$

et

$$\sum_{\sigma\in 1+p^{l-1}\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}} (\kappa(\tilde{\sigma})-1)\sigma(c_l) \in A^{00}\mathfrak{F}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$$

d'après le lemme 5.2. On conclût grâce à l'hypothèse de récurrence.

Par conséquent, $e_{c_n}(s)$ appartient bien à $\mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ et c'est de plus un générateur de $(g_n)_\star\mathfrak{w}^1(\mathrm{Spf}\ A)$ comme $g_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$-module car $e_{c_n}(s) = 1 \mod A^{00}$. Soit $t \in \mathfrak{w}^{univ}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$. On peut le voir comme un élément de $(g_n)_\star\mathfrak{w}^1_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$, et on a $t = \lambda e_{c_n}(s)$ avec $\lambda \in (g_n)_\star\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$. Mais λ est invariant sous $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$, donc $\lambda \in A$. Ceci démontre que $\mathfrak{w}_{n,r,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ est libre, engendré par $e_{c_n}(s)$.

□

5.4. Fonctorialité. — Dans ce numéro nous montrons que que le faisceau est fonctoriel par rapport à l'intervalle I, aux entiers n, r, et au morphisme de Frobenius.

5.4.1. Fonctorialité en l'intervalle I. — Soit $J \subset I$ un sous-intervalle. On a un morphisme naturel $\mathfrak{W}^0_J \to \mathfrak{W}^0_I$ et on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_{n,r,J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{n,r,J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_{r,J} \arrow[r, "i"] & \mathfrak{X}_{r,I}
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\mathfrak{F}_{n,r,J} \to \mathfrak{F}_{n,r,I}$ est équivariant sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$. Supposons que $n \geq k'+2$ (resp. $n \geq k'+4$ si $p = 2$).

Le diagramme ci-dessus induit un morphisme canonique :

$$i^\star\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n,r,J}.$$

Proposition 5.2. — *Supposons $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$ si $p = 2$). Le morphisme canonique précédent est un isomorphisme.*

Démonstration. Tensorisons le morphisme $i^\star\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n,r,J}$ par $(i^\star\mathfrak{w}_{n,r,I})^{-1}$. On obtient un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,J}} \to \mathfrak{w}_{n,r,J} \otimes (i^\star\mathfrak{w}_{n,r,I})^{-1}$, où $\mathfrak{w}_{n,r,I} \otimes (i^\star\mathfrak{w}^{un}_{n,r,J})^{-1}$ est un sous-faisceau du faisceau des fonction invariantes sous $\mathbb{Z}_p^\times(1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ sur $\mathfrak{F}_{n,r,J}$, qui vaut $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,J}}$. Le composé

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,J}} \to \mathfrak{w}_{n,r,J} \otimes (i^\star\mathfrak{w}_{n,r,I})^{-1} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,J}}$$

est l'isomorphisme canonique, et donc $i^\star\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n,r,J}$ est un isomorphisme. □

5.4.2. Fonctorialité en n. — Supposons $r+k \geq n' \geq n$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_{n',r,k} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r,k} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{n',r,k} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r,k} \arrow[dl] \\
\mathfrak{X}_{r,k} &
\end{tikzcd}$$

Le groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ agit sur $\mathfrak{F}_{n,r,I}$ et $\mathbb{Z}_p^\times(1+p^{n'}\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^{n'}-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ agit sur $\mathfrak{F}_{n',r,I}$. Le morphisme $\mathfrak{F}_{n',r,I} \to \mathfrak{F}_{n,r,I}$ est équivariant sous le morphisme évident $\mathbb{Z}_p^\times(1+p^{n'}\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^{n'}-1}{p-1}}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{Z}_p^\times(1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$.

Supposons $n \geq k'+2$ et $r \geq 1$ (resp. $n \geq k'+4$ et $r \geq 2$ si $p=2$). Le diagramme ci-dessus induit un morphisme canonique :

$$\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n',r,I}.$$

Proposition 5.3. — *Le morphisme canonique précédent est un isomorphisme.*

Démonstration. Tensorisons le morphisme $\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n',r,I}$ par $\mathfrak{w}_{n,r,I}^{-1}$. On obtient un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}} \to \mathfrak{w}_{n',r,I} \otimes \mathfrak{w}_{n,r,I}^{-1}$, où $\mathfrak{w}_{n',r,I} \otimes \mathfrak{w}_{n,r,I}^{-1}$ est un sous-faisceau du faisceau des fonction invariantes sous $\mathbb{Z}_p^\times(1+p^{n'}\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^{n'}-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ sur $\mathfrak{F}_{n',r,I}$, qui vaut $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. Le composé

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}} \to \mathfrak{w}_{n',r,I} \otimes \mathfrak{w}_{n,r,I}^{-1} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$$

est l'isomorphisme canonique, et donc $\mathfrak{w}_{n,r,I} \to \mathfrak{w}_{n',r,I}$ est un isomorphisme. $\square$

On écrit donc dorénavant $\mathfrak{w}_{n,r,I} = \mathfrak{w}_{r,I}$.

5.4.3. Fonctorialité à la restriction. — Soit $r' \geq r$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_{n,r',I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{n,r',I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_{r',I} \arrow[r, "i"] & \mathfrak{X}_{r,I}
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\mathfrak{F}_{n,r',I} \to \mathfrak{F}_{n,r,I}$ est équivariant sous l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times(1+p^n\mathrm{Hdg}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$. Supposons que $r' \geq r \geq 1$ et $n \geq k'+2$ (resp. $r' \geq r \geq 2$ et $n \geq k'+4$ si $p=2$) .

On dispose donc d'un morphisme $i^\star\mathfrak{w}_{r,k} \to \mathfrak{w}_{r',k}$.

Proposition 5.4. — *Le morphisme $i^\star\mathfrak{w}_{r,k} \to \mathfrak{w}_{r',k}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est analogue à la démonstration précédente. $\square$

Dorénavant, on écrit donc $\mathfrak{w}_{r,I} = \mathfrak{w}_I$.

5.4.4. Fonctorialité pour le morphisme de Frobenius. — L'isogénie canonique $F : E \to E/H_1 := E'$ induit un morphisme $\phi : \mathfrak{X}_{r,I} \to \mathfrak{X}_{r-1,I}$. Cette application se relève en une application $\phi : \mathfrak{IG}_{n,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r-1,I}$ si $n \leq k + r - 1$. On a donc une application $\mathfrak{IG}_{n+1,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r,I}$ obtenue en composant la projection naturelle $\mathfrak{IG}_{n+1,r,I}$ et le morphisme F. Indiquons une description directe du morphisme précédent.

Le morphisme F induit une surjection $F : H_{n+1}(E) \to H_n(E')$, et donc une injection $F^D : H_n^D(E') \to H_{n+1}^D(E)$ des duaux de cartier. Le morphisme $\mathfrak{IG}_{n+1,r,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r-1,I}$ associe à un morphisme $\psi : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D(E)$ le morphisme $\psi' : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n^D(E')$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] & H_n^D(E) \\
\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \arrow[r, "\psi'"] \arrow[u, "\times p"] & H_{n-1}^D(E') \arrow[u, "F^D"']
\end{tikzcd}$$

On a alors d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}_{n+1,r,I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r-1,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{n+1,r,I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r-1,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_{r,I} \arrow[r, "\phi"] & \mathfrak{X}_{r-1,I}
\end{tikzcd}$$

où le morphisme $\mathfrak{F}_{n+1,r,I} \to \mathfrak{F}_{n,r-1,I}$ est obtenu à l'aide du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n^D(E') \arrow[r] \arrow[d, "HT"] & H_{n+1}^D(E) \arrow[d, "HT"] \\
\omega_{E'} \arrow[r, "F^\star"] & \omega_E
\end{tikzcd}$$

Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre plate R, on associe à $\omega \in \mathfrak{F}_{n+1,r,I}(R)$, la forme différentielle $p\omega$, qui est vue dans $\omega_{E'}$ et qui appartient bien à $\mathfrak{F}_{n,r-1,k}(R)$.

Le morphisme $\mathfrak{F}_{n+1,r,k} \to \mathfrak{F}_{n,r-1,k}$ est équivariant sous le morphisme de groupes $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^{n+1}\mathrm{Hdg}(E)^{-\frac{p^{n+1}-1}{p-1}}\mathbb{G}_a) \to \mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n\mathrm{Hdg}(E')^{-\frac{p^n-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$. Supposons $r \geq 2$ et $n \geq k' + 2$ (resp. $r \geq 3$ et $n \geq k' + 4$ si $p = 2$). On dispose d'un morphisme $\phi^\star\mathfrak{w}_I \to \mathfrak{w}_I$.

Proposition 5.5. — *Le morphisme $\phi^\star\mathfrak{w}_I \to \mathfrak{w}_I$ est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est similaire à la proposition précédente. □

6. Perfectisation

Dans la partie précédente, nous avons expliqué la construction de faisceaux inversibles $\omega^\kappa_{[0,\infty[}$. Notre but est désormais de prolonger ces faisceaux à l'infini. La difficulté est la suivante : sur $[0,\infty[$ on a utilisé l'analyticité locale du caractère universelle. A l'infini, le caractère cesse d'être localement analytique. Ceci est cependant compensé par la fait qu'un sous-groupe canonique d'ordre infini existe. Nous allons considérer un pro-revêtement d'un voisinage strict de la courbe modulaire sur lequel la tour d'Igusa d'ordre infini existe. Ceci nous permettra de définir le faisceau des formes surconvergentes de façon uniforme sur ce pro-revêtement. Ensuite nous le descendrons en utilisant des traces de Tate.

6.1. Résultats principaux. — Le théorème qui suit est le résultat principal de cette partie. Il rassemble le théorème 6.3 et la proposition 6.7.

Théorème 6.1. — *Supposons $r \geq 3$ si $p \neq 2$ et $r \geq 5$ si $p = 2$, alors on possède un faisceau inversible $\mathfrak{w}_{[p,\infty]}$ sur $\mathfrak{X}_{r,[p,\infty]}$. Ce faisceau jouit des propriétés suivantes :*

1. *Pour tout intervalle $J = [p^k, p^{k'}] \subset [p, \infty[$ et $r + k \geq k' + 2$ (resp. $r + k \geq k' + 4$ si $p = 2$), l'image inverse de $\mathfrak{w}_{[p,\infty]}$ dans $\mathfrak{X}_{r,J}$ vaut le faisceau $\mathfrak{w}_J$ du théorème 5.1.*
2. *La restriction de $\mathfrak{w}_{[p,\infty]}$ à $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ vaut le faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$ du théorème 4.1.*
3. *On a un opérateur de Frobenius :*
$$i^\star \mathfrak{w}_{[p,\infty]} \simeq \phi^\star \mathfrak{w}_{[p,\infty]}$$
ou $i : \mathfrak{X}_{r+1,[p,\infty]} \to \mathfrak{X}_{r,[p,\infty]}$ est le morphisme d'inclusion et $\phi : \mathfrak{X}_{r+1,[p,\infty]} \to \mathfrak{X}_{r,[p,\infty]}$ est le Frobenius.

Il entraîne immédiatement le résultat suivant :

Théorème 6.2. — *Pour tout $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p = 2$), on possède un faisceau inversible $\omega^\kappa_{[0,\infty]}$ sur l'espace $\mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$, ainsi qu'un sous-faisceau $\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty]}$ de $\mathcal{O}^+_{\mathcal{M}_{r,[0,\infty]}}$-modules. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *La restriction du sous-faisceau $\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty]}$ à la composante libre $\mathcal{W}^0_{[0,\infty]}$ est un faisceau inversible de $\mathcal{O}^+_{\mathcal{X}_{r,[0,\infty]}}$-module.*
2. *Pour tout caractère localement algébrique $\chi.k : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ avec χ un caractère fini et $k \in \mathbb{Z}$ identifié à un point de $\mathcal{W}$, $\omega^\kappa_{[0,\infty]}|_{\{\chi.k\}} = \omega^k(\chi)$ est le faisceau usuel des formes modulaires de poids k et nebentypus χ.*
3. *Pour tout caractère $\bar{\kappa}_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ identifié à un point du bord de $\mathcal{W}$, $\omega^\kappa_{[0,\infty]}|_{\{\bar{\kappa}_\chi\}} = \omega^{\bar{\kappa}_\chi}$.*
4. *Le morphisme de Frobenius $\phi : \mathcal{M}_{r+1,[0,\infty]} \to \mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$ et l'inclusion $i : \mathcal{M}_{r+1,[0,\infty]} \to \mathcal{M}_{r,[0,\infty]}$ induisent des isomorphismes $\phi^\star\omega^\kappa_{[0,\infty]} \simeq i^\star\omega^\kappa_{[0,\infty]}$. Si on se restreint à $\mathcal{W}^0_{[0,\infty]}$, on a même des isomorphismes au niveau entier $\phi^\star\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty]} \simeq i^\star\omega^{\kappa,+}_{[0,\infty]}$.*

Démonstration. Sur $\mathfrak{M}_{r,[p,\infty]}$ on possède le faisceau $\mathfrak{w}_I \otimes \mathfrak{w}^f$ où $\mathfrak{w}_I$ est donné par la théorème 6.1 et $\mathfrak{w}^f$ est construit au numéro 6.8. Sa fibre générique est par définition $(\omega^\kappa_{[p,\infty]}, \omega^{\kappa,+}_{[p,\infty]})$. Ce faisceau se recolle avec le faisceau $(\omega^\kappa_{[0,\infty[}, \omega^{\kappa,+}_{[0,\infty[})$ du théorème 5.2. □

6.2. La tour anticanonique. — Soit $I = [p^k, p^{k'}]$ un sous-intervalle de $[1, \infty]$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Rappelons qu'on a des morphismes de Frobenius (voir la proposition 3.2) :

$$\phi : \mathfrak{X}_{r,I} \to \mathfrak{X}_{r-1,I}.$$

Soit $\mathfrak{X}_{\infty,I} = \lim_r \mathfrak{X}_{r,I}$ le schéma formel T-adique obtenu par limite inverse. C'est la tour anticanonique (voir [**26**], sect. 3). Pour tout $n \leq r + k$, on possède aussi une tour d'Igusa partielle $\mathfrak{IG}_{n,r,I}$ et on a un morphisme de Frobenius compatible avec le morphisme au dessus (voir la proposition 3.5) :

$$\phi : \mathfrak{IG}_{n,r+1,I} \to \mathfrak{IG}_{n,r,I}.$$

En passant à la limite projective on obtient le schéma formel T-adique $\mathfrak{IG}_{n,\infty,I} \to \mathfrak{X}_{\infty,I}$. Le morphisme précédent est affine et entier. En faisant varier n, on obtient finalement une tour de schémas formels $\mathfrak{IG}_{n+1,\infty,I} \to \mathfrak{IG}_{n,\infty,l} \to \cdots \to \mathfrak{X}_{\infty,I}$. On note alors $\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}$ la limite projective, dans la catégorie des schémas formels T-adiques, de cette tour. Le groupe $\mathbb{Z}_p^\times$ agit sur $\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}$.

Au dessus de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$ on a une chaîne de schémas semi-abéliens :

$$\cdots E_r \xrightarrow{F_r} E_{r-1} \cdots$$

où E_r provient de $\mathfrak{X}_{r,I}$. Soit Hdg_r l'idéal de Hodge associé à E_r. On a $\mathrm{Hdg}_{r+1}^p = \mathrm{Hdg}_r$ d'après le corollaire A.2.

Pour tout $n \leq r + k$, on dispose (voir le numéro 3.2.2) d'un morphisme de Trace $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}} : \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,r,I}}$, fonctoriel pour les applications de Frobenius. Par passage à la limite inductive et complétion, on obtient un morphisme $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}} : \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,\infty,I}}$

Proposition 6.1. — *On a* $\mathrm{Hdg}_r \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n-1,\infty,I}} \subset \mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}})$ *pour tout* $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Démonstration. D'après la proposition 3.4, on a $\mathrm{Hdg}_{r-n-1} = \mathrm{Hdg}_r^{p^{n-1}} \subset \mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,I}})$. On fait ensuite tendre r vers $+\infty$. □

Remarque 6.1. — Le fait de passer à la tour anticanonique a donc tué la ramification de la tour d'Igusa. C'est naturel car la tour anti-canonique $\mathfrak{X}_{\infty,I}$ est “relativement perfectoide” au dessus de l'espace des poids.

6.3. Traces de Tate. — L'objectif de cette section est de construire des traces de Tate qui permettent de redescendre le long de la tour anti-canonique. Notons $h_r : \mathfrak{X}_{\infty,I} \to \mathfrak{X}_{r,I}$ la projection. Le résultat principal de cette section est le suivant.

Proposition 6.2. — *Pour tout* $r \geq 1$, *on a des traces de Tate :*

$$\mathrm{Tr}_r : (h_r)_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,,I}}[1/T]$$

telles que pour tout $f \in \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T]$, $f = \lim_{r\to\infty} \mathrm{Tr}_r f$. *De plus, pour tout* $r \geq 1$ *(resp.* $r \geq 2$ *si* $p = 2$*),*

$$\mathrm{Tr}_r((h_r)_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}) \subset T^{-1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,\infty}}.$$

6.3.1. Un lemme sur la trace. — Le lemme suivant est la généralisation directe du corollaire III.2.21 de [**26**].

Lemme 6.1. — *Soit* $n \geq 1$ *un entier. Soit* S *une* $\mathbb{Z}_p$ *algèbre complète, topologiquement de type fini, de dimension* d*, formellement lisse. Soit* B *une* $\mathbb{Z}_p[[T]]$*- algèbre, plate comme* $\mathbb{Z}_p$*-algèbre, intègre et* T*-adiquement complète. On suppose aussi que* B *possède un élement* $T^{1/p^{n+1}}$ *et que* $p \in TB$*. Soit* $R = S\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} B$*. Soit* $f \in S$ *tel que* $\bar{f} \in S/p$ *n'est pas diviseur de* 0*. Soit* $R_n = R\langle u_n \rangle/(fu_n - T^{1/p^n})$*. Soit* $F : R_n \to R_{n+1}$ *une application* B*-linéaire telle que modulo* pT^{-1/p^n}*,* F *est donnée par* $F(u_n) = u_{n+1}^p$ *et par le Frobenius sur* S/p*. Alors* $R_{n+1}[1/T]$ *est une algèbre finie et plate au dessus de* $R_n[1/T]$ *et* $\mathrm{Tr}_F(R_{n+1}) \subset p^d T^{-\frac{2d+1}{p^n}} R_n$*.*

Démonstration. Commençons par remarquer que R_n et R_{n+1} sont des $\mathbb{Z}_p$-algèbres plates. Comme le lemme est local sur Spf S, on peut supposer qu'il y a une application Spf $S \to$ Spf $\mathbb{Z}_p\langle Y_1, ..., Y_d\rangle$ étale. On peut donc supposer que S/p est, vue comme S/p-module via le frobenius, un S/p-module libre de base $Y_1^{i_1}...Y_d^{i_d}$ avec $1 \leq i_k \leq p-1$.

Soit maintenant l'algèbre $R'_{n+1} = R\langle v_n\rangle/(f^p v_n - T^{1/p^n})$. C'est aussi une $\mathbb{Z}_p$-algèbre plate. On a une application $\tau : R'_{n+1} \to R_{n+1}$ donnée par $v_n \mapsto u_{n+1}^p$. Après inversion de T, cette application est un isomorphisme, d'inverse donné par $u_{n+1} \mapsto v_n f^{p-1} T^{-\frac{p-1}{p^{n+1}}}$. On en déduit que le morphisme τ est injectif, de conoyau tué par $T^{\frac{p-1}{p^{n+1}}}$.

On va maintenant vérifier que le morphisme $F : R_n \to R_{n+1}$ se factorise en $\tau \circ F'$ pour un morphisme $F' : R_n \to R'_{n+1}$. Pour le voir, il suffit de le vérifier modulo $T^{\frac{p^{n+1}-1}{p^{n+1}}}$ car toutes les algèbres en jeu sont sans T-torsion et $\frac{p^{n+1}-1}{p^{n+1}} > \frac{p-1}{p^{n+1}}$. Comme T divise p, on se ramène à le vérifier pour $F \mod \frac{p}{T^{1/p^n}}$, et c'est alors évident.

On vérifie de même que $F' \mod \frac{p}{T^{2/p^n}}$ est l'application qui envoie u_n sur v_n est qui est le Frobenius absolu sur $S \mod p$. On en déduit que $R'_{n+1} \mod \frac{p}{T^{2/p^n}}$ est fini et plate comme $R_n/\frac{p}{T^{2/p^n}}$-algèbre, engendrée par $Y_1^{i_1}...Y_d^{i_d}$, $1 \leq i_k \leq p-1$. La même chose est vraie pour R'_{n+1} vue comme R_n-algèbre.

Il en résulte que $R'_{n+1} = R_n\langle X_1, ..., X_d\rangle/(X_1^p - Y_1 - \frac{p}{T^{2/p^n}}P_1, ..., X_d^p - Y_d - \frac{p}{T^{2/p^n}}P_d)$ pour des polynômes $P_i \in R_n\langle X_1, ..., X_d\rangle$. On peut alors appliquer le lemme III. 2. 20 de [**26**] pour en déduire que $\mathrm{Tr}_{F'}(R'_{n+1}) \subset \frac{p^d}{T^{2d/p^n}} R_n$. Il en résulte alors que $\mathrm{Tr}_F(R_{n+1}) \subset \frac{p^d}{T^{2d+1/p^n}} R_n$. □

6.3.2. Extraction de racines de T. — Pour appliquer le lemme précédent, nous avons besoin d'extraire des racines de T dans l'espace des poids. On note $\mathcal{W}^{0,p^{-k}} = \mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p[[T^{1/p^k}]], \mathbb{Z}_p[[T^{1/p^k}]])^{an}$. Pour $k' \leq k$, le morphisme évident $\mathbb{Z}_p[[T^{1/p^{k'}}]] \to \mathbb{Z}_p[[T^{1/p^k}]]$ fournit des applications $\mathcal{W}^{0,p^{-k}} \to \mathcal{W}^{0,p^{-k'}}$. On note $\mathcal{W}_I^{0,p^{-k}}$ l'image inverse de $\mathcal{W}_I^0$ dans $\mathcal{W}^{0,p^{-k}}$.

On pose $B_{I,p^{-k}} = \mathrm{H}^0(\mathcal{W}_I^{0,p^{-k}}, \mathscr{O}^+_{\mathcal{W}^{0,p^{-k}}})$ et $\mathfrak{W}_I^{0,p^{-k}} = \mathrm{Spf}\ B_{I,p^{-k}}$. On observe que le morphisme qui envoie T sur T^{1/p^k} induit un isomorphisme $B_{p^{-k}I} \to B_{I,p^{-k}}$.

Soit $k \geq r+1$. On note $\mathcal{X}_{r,I,p^{-k}}$ le produit fibré $\mathcal{X}_{r,I} \times_{\mathcal{W}_I^0} \mathcal{W}_I^{0,p^{-k}}$. On définit alors $\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}$ comme le normalisé de $\mathfrak{X}_{r,I}$ dans $\mathcal{X}_{r,I,p^{-k}}$.

6.3.3. Description de $\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}$. — On a une chaîne de morphismes affines

$$\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}} \to \mathfrak{X}_{r,I} \to \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p} \mathfrak{W}_I^0 \to \mathfrak{X}.$$

Si Spf A est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$, si le faisceau ω est trivial sur Spf A et si $\tilde{\mathrm{Ha}} \in A$ est un relèvement de l'invariant de Hasse dans la trivialisation, la fibre au dessus de Spf A de cette chaîne de morphismes vaut :

$$A \to A \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_I \to A \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_I\langle\frac{\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}}}{T}\rangle \to A \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{I,p^{-k}}\langle\frac{\tilde{\mathrm{Ha}}}{T^{1/p^{r+1}}}\rangle$$

6.3.4. Application du lemme. — On a un carré cartésiens (la colonne de gauche est le changement de base, de $\mathcal{W}_I^0$ à $\mathcal{W}_{I,p^{-k}}^0$ de la colonne de droite) :

(6.3.A)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{r,I,p^{-k}} & \longrightarrow & \mathcal{X}_{r,I} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \mathcal{X}_{r-1,I,p^{-k}} & \longrightarrow & \mathcal{X}_{r-1,I} \end{array}$$

Celui-ci provient d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathfrak{X}_{r,I} \arrow[d, "\phi"] \\ \mathfrak{X}_{r-1,I,p^{-k}} \arrow[r] & \mathfrak{X}_{r-1,I} \end{tikzcd}$$

De plus, le morphisme $\phi : \mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}} \to \mathfrak{X}_{r-1,I,p^{-k}}$ est localement donné par un morphisme d'algèbres :

$$A \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{I,p^{-k}} \langle \frac{\tilde{\mathrm{Ha}}}{T^{1/p^r}} \rangle \to A \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{I,p^{-k}} \langle \frac{\tilde{\mathrm{Ha}}}{T^{1/p^{r+1}}} \rangle$$

qui modulo pT^{-1/p^r} provient du morphisme de Frobenius absolu sur A.

Corollaire 6.1. — *On a*

1. *Pour tout* $k \geq r+1$, $\mathrm{Tr}_\phi(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}}) \subset pT^{-\frac{3}{p^r}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r-1,I,p^{-k}}}$,
2. *Pour tout* $k \geq r+1$ *et* $r' \geq r$, $\mathrm{Tr}_{\phi^{r'-r}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I,p^{-k}}}) \subset p^{r-r'} T^{-\frac{3}{p^r(p-1)}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}}$.
3. *Pour tout* $r' \geq r \geq 1$ *(resp.* $r \geq 2$ *si* $p = 2$*),* $\mathrm{Tr}_{\phi^{r'-r}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}) \subset p^{r'-r} T^{-1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$.

Démonstration. Les points 1 et 2 résultent immédiatement du lemme 6.1 appliqué pour $d = 1$. Comme le diagramme 6.3.A est cartésien, on déduit de 2 que $\mathrm{Tr}_{\phi^{r'-r}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}) \subset p^{r-r'} T^{-\frac{3}{p^r(p-1)}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}} \cap \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T]$. Pour $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$), il suffit de voir que $T^{-\frac{3}{p^r(p-1)}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}} \cap \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T] \subset T^{-1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$. C'est clair car $\mathfrak{X}_{r,I,p^{-k}}$ est fini sur $\mathfrak{X}_{r,I}$ qui est integralement clos dans sa fibre générique et $\frac{3}{p^r(p-1)} \leq 1$. □

Corollaire 6.2. — *Pour tout* $r \geq 1$*, on a des traces de Tate :*

$$\mathrm{Tr}_r : (h_r)_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,,I}}[1/T]$$

telles que pour tout $f \in \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T]$, $f = \lim_{r\to\infty} \mathrm{Tr}_r f$*. De plus, pour tout* $r \geq 1$ *(resp.* $r \geq 2$ *si* $p = 2$*),*

$$\mathrm{Tr}_r((h_r)_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}) \subset T^{-1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,\infty}}.$$

Démonstration. Considérons l'application

$$\frac{1}{p^{r'-r}} \mathrm{Tr}_{\phi^{r-r'}} : \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T].$$

Cette application envoie $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}$ dans

$$T^{-\frac{3}{p^r(p-1)}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$$

On obtient en passant à la limite inductive , une application $\mathrm{Tr}_r : \mathrm{colim}_{r'} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r',I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I,\infty}}[1/T]$. Cette application est uniformément continue. On peut donc la prolonger par continuité en une application $\mathrm{Tr}_r : \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}[1/T]$. □

6.4. Le faisceau modulaire sur la tour anti-canonique. — Nous allons maintenant pouvoir définir le faisceau des formes surconvergentes sur le perfectisé.

Lemme 6.2. — *Le faisceau* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}$ *est intégralement clos dans* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}[1/T]$.

Démonstration. Soit Spf R un ouvert de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$. Pour tout r suffisamment grand, Spf R provient d'un ouvert Spf R_r de $\mathfrak{X}_{r,I}$. Soit $f \in R[1/T]$. On suppose que f vérifie une relation de dépendance intégrale sur R. Pour r suffisament grand, $f = f_r + h$ avec $f_r \in R_r[1/T]$ et $h \in R$. On peut donc supposer que $f \in R_r[1/T]$. Soit $f^n + f^{n-1}a_{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ une relation de dépendance avec $a_i \in R$. En appliquant $\mathrm{Tr}_{r'}$ pour $r' \geq r$ on obtient $f^n + f^{n-1}\mathrm{Tr}_{r'}(a_{n-1}) + \cdots + \mathrm{Tr}_{r'}(a_0) = 0$ et comme $a_i \in R$, pour r' suffisamment grand $\mathrm{Tr}_{r'}(a_i) \in R \cap T^{-1}R_{r'}$. Pour tout $r'' \geq r'$, le morphisme $R_{r'} \to R_{r''}$ est fidèlement plat, donc $R_{r'}/T \to R_{r''}/T$ est injectif et par conséquent $R_{r'}/T \to R/T$ aussi. Il en résulte que $T\mathrm{Tr}_{r'}(a_i) \in TR_{r'}$ et donc $\mathrm{Tr}_{r'}(a_i) \in R_{r'}$. En conclusion, f_r vérifie une relation de dépendance sur $R_{r'}$, donc $f_r \in R_{r'}$. □

Lemme 6.3. — *On a* $(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}})^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}$

Démonstration. Soit Spf R un ouvert de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$. Soit Spf R_n son image inverse dans $\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}$. Le morphisme $R[1/T] \to R_n[1/T]$ est fini étale, donc $(R_n)^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \subset R[1/T]$. Comme R_n est entier sur R, le lemme précédent permet de conclure. □

Proposition 6.3. — *On a* $(\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}})^{\mathbb{Z}_p^\times} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}$.

Démonstration. Soit Spf R un ouvert affine de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$. Soit $x \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ R))^{\mathbb{Z}_p^\times}$. On a $x = x' + Tx''$ avec $x' \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$ pour n assez grand. Il en résulte que $x'' \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ A))^{1+p^n\mathbb{Z}_p}$. Pour tout $n' \geq n$, On possède, d'après la proposition 6.1, un élément $c_{n'} \in \mathscr{O}\mathfrak{IG}_{n',\infty,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}_{n',\infty,I}/\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(c_n) = T$. Par conséquent, la cohomologie supérieure de $(1 + p^n\mathbb{Z}/p^{n'}\mathbb{Z})$ agissant sur $\mathscr{O}\mathfrak{IG}_{n',\infty,I}(\mathrm{Spf}\ A)$ est annulée par T (voir [**28**], sect. 3.2, coro. 1). Pour tout s, il existe $n(s) \geq n$ tel que

$$x'' \bmod T^s \in (\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n(s),\infty,I}}/T^s)^{\mathbb{Z}_p^\times},$$

et donc, il existe $y_s \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$ tel que $y_s \mod T^s = Tx''$. Il en résulte que y_s converge vers un élement y quand $s \to \infty$ et que $Tx'' = y$. Il en résulte que $x \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ A)$ et on conclut par le lemme précédent. □

On définit alors le faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$ comme le sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}$ des sections qui se transforment selon le caractère κ^{-1} pour l'action du groupe $\mathbb{Z}_p^\times$.

Proposition 6.4. — *Le faisceau* $\mathfrak{w}_I^{perf}$ *est un faisceau localement libre de rang* 1.

Démonstration. Soit Spf A un ouvert affine de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$. On suppose que Hdg_1 est principal, engendré par un élément $\tilde{\mathrm{Ha}}_1$. Grâce à la proposition 6.1 on peut trouver une suite d'éléments $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}_1^{-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(A)$ tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$, $c_1 = \frac{1}{p-1}$, $c_0 = 1$.

Posons alors $b_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $b_n = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c_n$, où $\tilde{\sigma}$ est un relèvement de σ dans $\mathbb{Z}_p^\times$. D'après le lemme 2.3, on a $\kappa(1 + p^n\mathbb{Z}_p) \subset 1 + T^n\mathscr{O}_{\mathfrak{W}_I}$ (resp. $1 + T^{n-1}\mathscr{O}_{\mathfrak{W}_I}$ si $p = 2$) et $\kappa(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times) = 1$. Un autre choix de relèvement $\tilde{\sigma}'$ donnerait un élément b'_n et :

- $b'_n - b_n \in \frac{T^n}{\tilde{\mathrm{Ha}}_1}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(A)$ si $p \neq 2$ et $n \geq 2$,
- $b'_n - b_n \in \frac{T^{n-1}}{\tilde{\mathrm{Ha}}_1}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}}(A)$ si $p = 2$ et $n \geq 2$,
- $b_1 - b'_1 \in TA$.

On vérifie par récurrence comme dans la démonstration du théorème 4.1 que :

– $b_n - b_{n-1} \in T^{n-1}\tilde{\mathrm{Ha}}_1^{-1}$ si $n \geq 2$ et $p \neq 2$,
– $b_n - b_{n-1} \in T^{n-2}\tilde{\mathrm{Ha}}_1^{-1}$ si $n \geq 3$ et $p = 2$,
– $b_1 - 1 \in TA$,
– $b_2 - 1 \in T\tilde{\mathrm{Ha}}_1^{-1}$,

La suite b_n converge donc vers un élément $b_\infty \in \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}(A)$ et $b_\infty = 1 \mod \frac{T}{\tilde{\mathrm{Ha}}_1}$ est un élément inversible de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}}(A)$. Il résulte alors de la proposition 6.3 que $\mathfrak{w}_I^{perf}(A) = b_\infty.A$. □

Proposition 6.5. — *Soit $J \subset I$ un sous-intervalle et $i_{J,I} : \mathfrak{X}_{\infty,J} \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\infty,I}$ le morphisme naturel. On a la compatibilité au changement de base :*

$$i_{J,I}^\star \mathfrak{w}_I^{perf} = \mathfrak{w}_J^{perf}$$

Démonstration. Cela ne pose pas de problème. □

6.5. Comparaison avec le faisceau $\mathfrak{w}_I$. — Dans ce numéro, $I = [p^k, p^{k'}]$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On suppose $k+r \geq k'+1$ (resp. $k+r \geq k'+3$ si $p=2$ et $r \geq 1$ (resp. $r \geq 2$ si $p = 2$). Sur $\mathfrak{X}_{r,I}$, on possède, d'après le théorème 5.1, un faisceau $\mathfrak{w}_I$. Le but de cette section et de démontrer que son image inverse sur la tour anti-canonique est le faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$.

Au dessus de $\mathfrak{X}_{\infty,I}$, on a une chaine d'isogénies $\cdots E_r \to E_{r-1} \to \cdots$ où E_r est le schéma semi-abélien qui provient de $\mathfrak{X}_{r,I}$. On note $C_{n,r} \hookrightarrow E_r[p^n]$ le schéma en groupes

$$\mathrm{Ker}(F_{r+n}^D : E_r \to E_{r+n}).$$

Clairement, $C_{n,r} = H_n(E_{r+n})^D$. L'isogénie $F_r : E_r \to E_{r-1}$ induit un morphisme $C_{n,r} \to C_{n,r-1}$ qui est un isomorphisme génériquement. Au dessus de $\mathfrak{IG}_{n,\infty,I}$, on possède un morphisme universel $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to H_n(E_r)^D$ pour tout $r \geq n-k$. De plus, l'application $C_{n,r} \to E_r[p^n]/H_n(E_r) \simeq H_n(E_r)^D$ est clairement un isomorphisme générique. En composant, on possède donc une application $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to C_{n,r}$ pour tout $r \geq n-k$. En utilisant les morphismes $C_{n,r} \to C_{n,r-1}$ on en déduit l'existence de morphismes $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to C_{n,r}$ pour tout n et r qui sont des isomorphismes génériques. En passant à la limite projective, on obtient un morphisme $\mathbb{Z}_p \to \lim_n C_{n,r}$. Soit HT^{un} l'image de $1 \in \lim_n C_{n,r}$ par l'application de Hodge-Tate $\lim_n E_r[p^n] \to \omega_{E_r}$. Par définition, HT^{un} fournit une application $\mathbb{Z}_p^\times$-équivariante :

$$\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I} \to \mathfrak{F}_{n,r,I}$$

qui s'insert dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{IG}_{\infty\infty,I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{n,\infty,I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{n,r,I} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_{\infty,I} \arrow[r, "h_r"] & \mathfrak{X}_{r,I}
\end{tikzcd}$$

Proposition 6.6. — *On dispose d'une isomorphisme canonique $\mathfrak{w}_I^{perf} \simeq (f_r)^\star \mathfrak{w}_I$.*

Démonstration. On possède clairement une application injective : $(f_r)^\star \mathfrak{w}_I \to \mathfrak{w}_I^{perf}$. De plus, $\mathfrak{w}_I^{perf} \otimes f_r^\star \mathfrak{w}_I^{-1} \subset (\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I}})^{\mathbb{Z}_p^\times} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,I}}$. □

Corollaire 6.3. — *On dispose d'une trace de Tate* $\mathrm{Tr}_r : (h_r)_\star \mathfrak{w}_I^{perf} \to \mathfrak{w}_I$. *Cette trace est fonctorielle en l'intervalle* I.

6.6. Descente. — Dans cette section, fixons $I = [p, \infty]$. Nous allons montrer que le faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$ descend sur $\mathfrak{X}_{r,I}$ pour $r \geq 3$ (resp. $r \geq 5$ si $p = 2$).

Le théorème 1.6 de [**22**] affirme que dans un espace rigide normal sur un corps, une fonction bornée sur un ouvert dense de Zariski se prolonge à tout l'espace. Il serait intéressant de savoir si cet énoncé reste valable pour un espace adique analytique. Le lemme suivant le montre dans un cas très particulier.

Lemme 6.4. — *On a*

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}} = \lim_{[p^k, p^{k'}], k+1 \geq k' \geq k \geq 1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]}}.$$

Démonstration. D'après [**22**], thm. 1.6, on a $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p;p^{k''}]}} = \lim_{[p^k,p^{k'}], k'' \geq k+1 \geq k' \geq k \geq 1} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]}}$. On se ramène donc à vérifier que $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}} = \cap_{k \geq 0} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p,p^k]}}$. Soit Spf A un ouvert affine de $\mathfrak{X}$. On suppose que ω est trivial sur Spf A. La fibre dans $\mathfrak{X}_{r,I}$ de Spf A vaut Spf $B = A[[T]]\langle u, w\rangle/(w\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^{r+1}} - T, T^p u - p)$ où $\tilde{\mathrm{Ha}}$ est un générateur de Hdg. La fibre dans $\mathfrak{X}_{[p,p^k]}$ vaut Spf B_k avec $B_k = B\langle v_K\rangle/(pv_k - T^{p^k})$. L'application $B_{k+1} \to B_k$ envoie v_{k+1} sur $T^{p^{k+1}-p^k} v_k$. Comme tout élément de B_k s'écrit de façon unique $\sum_{i \geq 0} b_i v_k^i$ avec $b_i \in B$ tend vers 0 quand i tend vers l'infini et $b_i \in B \setminus pB$. Dans cette description, on a bien que $\lim_k B_k = B$. $\square$

Lemme 6.5. — *Soit* $r = 3$ *si* $p \neq 2$ *et* $r = 5$ *si* $p = 2$. *Soit* $k \geq 1$. *Supposons* $r \leq n \leq k+r$. *On a*

$$\kappa(1 + p^{n-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset \mathrm{Hdg}_r^{\frac{p^n - p}{p-1}} T^2 \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,[p^k,\infty]}}.$$

Démonstration. Soit Spf A un ouvert de $\mathfrak{X}_{r,[p^k,\infty]}$ sur lequel $\mathrm{Hdg}_r = (\tilde{\mathrm{Ha}})$. On a $\kappa(1 + p^{n-1}\mathbb{Z}_p) - 1 \subset (pT, T^{p^{n-2}})$ (resp. $(pT, T^{p^{n-3}})$ pour $p = 2$). On a alors dans A les formules

$$\frac{p}{\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{r+k}}} = pT^{-p^k} (\frac{T}{\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{r+1}}})^{p^{k-1}} T^{p^k - p^{k-1}} \quad \text{et} \quad \frac{T^{p^{n-2}}}{\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{n+1}}} = (\frac{T}{\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{r+1}}})^{p^{n-r}} T^{p^{n-2} - p^{n-r}}.$$

Le lemme en résulte car $p^k - p^{k-1} + 1 \geq 2$ pour tout $k \geq 1$, $p^{n-2} - p^{n-3} \geq 2$ pour tout $n \geq 3$ si $p \neq 2$ et $p^{n-3} - p^{n-5} \geq 2$ si $p = 2$ et $n \geq 5$. $\square$

Nous sommes maintenant préparés pour démontrer la descente.

Théorème 6.3. — *Le faisceau* $\mathfrak{w}_I^{perf}$ *descend en un faisceau* $\mathfrak{w}_I$ *sur* $\mathfrak{X}_{r,I}$ *avec* $r = 3$ *si* $p \geq 3$ *et* $r = 5$ *si* $p = 2$.

Démonstration. On pose $\mathfrak{w}_I = \lim_{[p^k,p^{k'}], k+1 \geq k' \geq k \geq 1} \mathfrak{w}_{[p^k,p^{k'}]}$. C'est un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{r,I}}$-modules. Commençons par fixer un ouvert Spf A de $\mathfrak{X}$ sur lequel le faisceau ω_E est trivial. Soit Spf B l'image inverse de cet ouvert dans $\mathfrak{X}_{r,I}$. Comme ω_E est trivial, Hdg_r est trivial, engendré par un élément $\tilde{\mathrm{Ha}}_r$. Soit $c_0 = 1 \in \mathscr{O}_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}_{0,r,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$, $c_1 = \frac{1}{p-1} \in \mathscr{O}_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}_{1,r,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$, $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-\frac{p^n-p}{p-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}_{n,r,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$, pour $n \leq r$ et $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^r} \mathscr{O}_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}_{n,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$ pour $n \geq r$ des éléments tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}}(c_n) = c_{n-1}$. On pose $b_n = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c_n$, où $\tilde{\sigma}$ est un relèvement de σ dans $\mathbb{Z}_p^\times$. On a $b_n - b_{n-1} \in T^{n-1}\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^r}$ (resp. $T^{n-2}\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^r}$ si $p = 2$). Soit $b_\infty \in \mathscr{O}_{\mathfrak{I}\mathfrak{G}_{\infty,\infty,I}}(\mathrm{Spf}\ B)$ la limite des b_n. Comme dans la démonstration de la proposition 6.4, on voit que $b_\infty = 1 \mod T\tilde{\mathrm{Ha}}^{-p^r}$. C'est donc un générateur du faisceau $\mathfrak{w}_I^{perf}$ sur

Spf B. On observe également que $b_\infty - b_r = 1 \mod T^r\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^r}$ et donc $b_\infty - b_r = 1 \mod T^2$.

Soit $J = [p^k, p^{k+1}]$ avec $k \geq 1$. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,I} \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{\infty,\infty,J} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{F}_{k+r,r,J} \arrow[d] \\
\mathfrak{IG}_{k+r,\infty,I} \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{k+r,\infty,J} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{IG}_{k+r,r,J} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_{\infty,I} & \mathfrak{X}_{\infty,J} \arrow[l] \arrow[r, "h_r"] & \mathfrak{X}_{r,J}
\end{tikzcd}$$

Soit Spf C l'image inverse de Spf B dans $\mathfrak{X}_{r,J}$. Soit $s \in \mathscr{O}_{\mathfrak{F}_{k+r,r,J}}(\mathrm{Spf}\ C)$ une section telle que $\kappa(\sigma)s = \kappa^{-1}(\sigma)s$ pour tout $\sigma \in (1 + p^{k+r}\mathrm{Hdg}_r^{-\frac{p^{k+r}-1}{p-1}}\mathbb{G}_a)$ et $s = 1 \bmod q$ (voir le lemme 5.3). Pour tout $n \leq r+k$, soit $c'_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-\frac{p^n-p}{p-1}}\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,J}}(\mathrm{Spf}\ C)$ des éléments tels que $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c'_n) = c'_{n-1}$ et $c'_n = c_n$ si $n \leq r$. On note alors $f = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^{k+r}\ \mathbb{Z})^\times} \kappa(\sigma)\sigma.c'_{r+k}s$. C'est un générateur de $\mathfrak{w}_J$ sur Spf C, d'après le lemme 5.4. Comme $T^{p^k} \mid p$ et $\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{p^{r+1}} \mid T$ dans C, il en résulte que

$$p\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^{r+k}} = (pT^{-p^k})(T\tilde{\mathrm{Ha}}_r^{-p^{r+1}})^{p^{k-1}}T^{p^k-p^{k-1}}.$$

Par conséquent, $f = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^{k+r}\ \mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c'_{r+k} \mod T^2$. Montrons maintenant par récurrence descendante sur $r \leq n \leq r+k$ que $f = \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\ \mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c'_n \mod T^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^n\ \mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c'_n &= \sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/p^{n-1}\ \mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\tau})\tilde{\tau}.\Big(\sum_{\sigma \in (1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\ \mathbb{Z})} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c'_n\Big) \\
&= \sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/p^{n-1}\ \mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\tau})\tilde{\tau}.\Big(c'_{n-1} + \sum_{\sigma \in (1+p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\ \mathbb{Z})} (\kappa(\tilde{\sigma})-1)\sigma.c'_n\Big)
\end{aligned}$$

D'après le lemme 6.5, $(\kappa(\tilde{\sigma})-1)\sigma.c'_n = 0 \mod T^2$. On conclût donc la récurrence. Vérifions à présent que $f = b_\infty \mod T^2$ vues comme des sections de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,J}}(\mathrm{Spf}\ C)$.

On a alors dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{\infty,\infty,J}}(\mathrm{Spf}\ C) \mod T^2$:

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^{k+r}\ \mathbb{Z})^\times} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c'_{r+k} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}} \kappa(\tilde{\sigma})\sigma.c_r \\
&= b_r \\
&= b_\infty
\end{aligned}$$

On a donc $b_\infty = (1+T^2u)f$ pour une fonction $u \in \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\infty,J}}(\mathrm{Spf}\ C)$. Il en résulte que $\mathrm{Tr}_3(b_\infty) = f(1+T^2\mathrm{Tr}_3(u))$. Comme $\mathrm{Tr}_r(u) \in T^{-1}\mathrm{Spf}\ C$, il en résulte que $\mathrm{Tr}_r(b_\infty)$ est un générateur de $\mathfrak{w}_J$ sur Spf C. Comme la construction de $\mathrm{Tr}_r(b_\infty)$ est fonctorielle en J, il résulte du lemme 6.4 que c'est un générateur de $\mathfrak{w}_I$ sur Spf B. En conclusion, le faisceau $\mathfrak{w}_I$ est localement libre et $h_r^\star\mathfrak{w}_I = \mathfrak{w}_I^{perf}$ □

6.7. Comparaison avec le faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$. — Dans la section précédente, nous avons construit un faisceau $\mathfrak{w}_I$ sur l'intervalle $I = [p, \infty]$. Nous allons maintenant vérifier que sa fibre en l'infini est bien le faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$ du numéro 4.4.1.

Proposition 6.7. — *La restriction de $\mathfrak{w}_I$ à $\mathfrak{X}_{r,\{\infty\}}$ vaut $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}$.*

Démonstration. Commençons par remarquer qu'on dispose du diagramme commutatif pour tout $k' \geq k \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_p[[T]]\langle u\rangle/(T^{p^k}u - p) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}_p[[T]]\langle u, v\rangle/(T^{p^k}u - p, pv - T^{p^{k'}}) \arrow[d] \\
\mathbb{F}_p[[T]] \arrow[r] & \mathbb{F}_p[[T]]/T^{p^{k'}}
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}_{r,[p^k,\infty]} & \mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]} \arrow[l] \\
\mathfrak{X}_{r,\infty} \arrow[u] & V(T^{p^{k'}}) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où $V(T^{p^{k'}})$ désigne le fermé d'équation $T^{p^{k'}} = 0$ dans $\mathfrak{X}_{r,[p^k,p^{k'}]}$. Il en résulte que $\mathfrak{w}_{[p^k,\infty]}/(u, T^{p^{k'}}) \simeq \mathfrak{w}_{[p^k,p^{k'}]}/u$. Soit Spf A un ouvert de $\mathfrak{X}$ au dessus duquel Hdg est trivial, engendré par un élément $\tilde{\mathrm{Ha}}$. Soit Spf B son image inverse dans $\mathfrak{X}_{r,[p^k,\infty]}$. Soit $c_0 = 1$ et pour $1 \leq n \leq k + r$, soit $c_n \in \tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n - p}{p-1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{n,r,[p^k,\infty]}}(\mathrm{Spf}\ B)$ vérifiant $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{IG}}(c_n) = c_{n-1}$, $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{p-1}$. Alors, le faisceau $\mathfrak{w}_{[p^k,\infty]}/(u, T^{p^{k+1}})$ restreint à Spf B est le sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{k+r,r,\{\infty\}}}/T^{p^{k+1}}(\mathrm{Spf}\ A)$ engendré par l'image de $\sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/p^{k+r}\mathbb{Z})^\times} \kappa(\sigma)\sigma.c_{k+r}$ (d'après le lemme 5.4). Il s'identifie donc au faisceau $\mathfrak{w}_{\{\infty\}}/T^{p^{k+1}}$ (voir la démonstration du théorème 4.1).

□

6.8. La partie finie du caractère. — Rappelons que $\mathfrak{W}_I = \mathrm{Spf}\ B_I[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times]$ et que $\mathfrak{M}_{r,I} = \mathfrak{X}_{r,I} \otimes_{\mathfrak{W}_I^0} \mathfrak{W}_I$ (voir 3.3 pour les notations). Soit $\kappa^f : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times \to B_I[\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times]$ le caractère universel. Soit $f : \mathfrak{IG}_{i,r,I} \times_{\mathfrak{W}_I^0} \mathfrak{W}_I \to \mathfrak{M}_{r,I}$ où $i = 1$ si $p \neq 2$ et $i = 2$ si $p = 2$. On note alors $\mathfrak{w}_I^f = f_\star \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}_{i,r,I} \times_{\mathfrak{W}_I^0}}[(\kappa^f)^{-1}]$. C'est un faisceau cohérent de fibre analytique localement libre car le morphisme f est fini étale en fibre analytique.

Appendice A
Théorie du sous-groupe canonique

La théorie du sous-groupe canonique a été considérée par de nombreux auteurs. Le point de vue adopté est cependant toujours p-adique. Nous reformulons ici la théorie au niveau de généralité dont nous avons besoin, c'est à dire sans supposer que la topologie est p-adique. Nous allons reprendre la méthode expliquée dans [**26**], sect. III.2, qui repose sur la théorie du complexe cotangent d'Illusie.

A.1. Invariant de Hasse et idéal de Hodge. — Si $H \to \operatorname{Spec} R$ est un schéma en groupes, on note $\ell_{H/R}$ son complexe de co-Lie et $\omega_H = \mathrm{H}^0(\ell_{H/R})$ son faisceau conormal ([**23**]). Supposons que R est un anneau de caractéristique p. Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué sur R. On note F et V les morphismes de Frobenius et Verschiebung. Le complexe de co-Lie de Ker$V$ est représenté par :

$$[\omega_G \overset{HW(G)}{\longrightarrow} \omega_{G^{(p)}}]$$

où $HW(G)$ s'appelle la matrice de Hasse-Witt. Soit d la dimension de G. Le déterminant de la matrice de Hasse-Witt est l'invariant de Hasse $\mathrm{Ha}(G) \in (\Lambda^d \omega_G)^{\otimes p-1}$.

Supposons que R est un anneau p-adiquement complet. On note $\mathrm{Hdg}(G)$ et on appelle idéal de Hodge de G l'image inverse dans R de l'idéal $\mathrm{Ha}(G)(\Lambda^d\omega_G)^{\otimes(1-p)} \subset R/p$.

Lemme A.1. — *L'idéal* $\mathrm{Hdg}(G)$ *est localement pour la topologie de Zariski engendré par deux éléments. Supposons que* $p \in \mathrm{Hdg}(G)^2$*. Alors* $\mathrm{Hdg}(G)$ *est un idéal inversible.*

Démonstration. Quitte à remplacer $\operatorname{Spec} R$ par un ouvert de Zariski, on peut supposer que l'idéal $\mathrm{Ha}(G)(\Lambda^d\omega_G)^{\otimes(1-p)} \subset R/p$ est principal. Notons $\tilde{\mathrm{Ha}}$ un relèvement dans R d'un générateur. L'idéal de Hodge vaut alors $(p, \tilde{\mathrm{Ha}})$. Si $p \in \mathrm{Hdg}(G)^2$, alors $p = \tilde{\mathrm{Ha}}u + p^2 v$ pour $u, v \in R$, et donc $p(1-pv) = \tilde{\mathrm{Ha}}u$. Comme $1-pv$ est inversible, $\mathrm{Hdg}(G)$ est engendré par $\tilde{\mathrm{Ha}}$. □

A.2. Construction du sous-groupe canonique. — Soit A_0 un anneau intègre et $\alpha \in A_0$ un élément non nul. On équipe A_0 de la topologie α-adique et on suppose que A_0 est α-adiquement complet. On suppose aussi qu'on a un morphisme $\mathbb{Z}_p \to A_0$ continue. Dans le cas classique, on prend $A_0 = \mathbb{Z}_p$ et $\alpha = p$.

Proposition A.1. — *Soit R une A_0-algèbre α-adiquement complète et sans A_0-torsion. Soit* $G \to \operatorname{Spec} R$ *un groupe fini et localement libre. Soit* $C_1 \subset G_1 = G|_{\operatorname{Spec} R/p}$ *un sous-groupe fini localement libre. Soit* $L_1 = G_1/C_1$*. On suppose qu'il existe un élément* $\lambda \in A_0$ *tel que* $p = \lambda^2 u$ *avec u topologiquement nilpotent et la multiplication par λ est homotope à* 0 *sur le complexe de co-Lie* $\ell_{L_1/R/pR}$*. Alors il existe un sous-groupe fini et plat* $C \subset G$ *tel que* $C|_{\operatorname{Spec} R/\frac{p}{\lambda}R} = C_1|_{\operatorname{Spec} R/\frac{p}{\lambda}R}$*.*

Démonstration. Introduisons les anneaux $B_1 = R/p^2\lambda^{-1}R$ et $B_2 = \{(x,y) \in R/p^2\lambda^{-2}R \times R/pR, x = y \in R/p\lambda^{-1}R\}$. On a des augmentations $B_1 \to R/pR$ et $B_2 \to R/pR$ de noyau J_1 et J_2 isomorphes à $R/p\lambda^{-1}$. On a une application diagonale $B_1 \to B_2$ qui induit la multiplication par λ de J_1 vers J_2. En appliquant le thm. 3.2.1 (comme dans le coro. 3.2.2) de [**26**], on peut relever $C_1|_{\operatorname{Spec} R/\frac{p}{\lambda}R}$ en un groupe localement libre $C_2 \hookrightarrow G|_{\operatorname{Spec} R/p^2\lambda^{-2}R}$. Supposons par récurrence qu'on a construit $C_n \hookrightarrow G|_{\operatorname{Spec} R/p^n\lambda^{-n}R}$ qui relève $C_1|_{\operatorname{Spec} R/\frac{p}{\lambda}R}$. Soit L_n le conoyau du morphisme $C_n \to G|_{\operatorname{Spec} R/p^n\lambda^{-n}R}$. La multiplication par λ dans le complexe de co-Lie $\ell_{L_n/R/p^n\lambda^{-n}R}$ est homotope à 0 modulo $\frac{p}{\lambda}$. On a donc, dans l'anneau des endomorphismes de $\ell_{L_n/R/p^n\lambda^{-n}}$ une homothopie $\lambda \sim \frac{p}{\lambda}v$ pour un endomorphisme v. Il en résulte que $\lambda(1-uv) \sim 0$, mais $1-uv$ est inversible car u est topologiquement nilpotent. Il en résulte que la multiplication par λ est homotope à 0. Considérons alors les anneaux $B_1' = R/p^{n+1}\lambda^{-n}R$ et $B_2' = \{(x,y) \in R/p^{n+1}R\lambda^{-n+1} \times R/p^n\lambda^{-n}R, x = y \in R/p^n\lambda^{-n-1}R\}$. On a des augmentations $B_1' \to R/p^n\lambda^{-n}$ et $B_2' \to R/p^n\lambda^{-n}$ de noyau J_1' et J_2' isomorphes à R/p. On a une application diagonale $B_1' \to B_2'$ qui induit la multiplication par λ de J_1 vers J_2. En raisonnant comme au-dessus on construit un relèvement $C_{n+1} \hookrightarrow G|_{\operatorname{Spec} R/p^{n+1}\lambda^{-n-1}R}$ de $C_n|_{\operatorname{Spec} R/p^n\lambda^{-n+1}R}$ et donc de $C_1|_{\operatorname{Spec} R/\frac{p}{\lambda}R}$. Comme R est $\frac{p}{\lambda}$-adiquement complet, on peut conclure.

□

Lemme A.2. — *Soit R une A_0-algèbre α-adiquement complète et sans A_0-torsion. Soit $X \to \mathrm{Spec}\ R$ un schéma tel que $\Omega^1_{X/R}$ est annulé par la multiplication par $\lambda \in A_0$. Soit $a \in A_0$ tel que $a^2 \in \lambda R$, et $s_1, s_2 : \mathrm{Spec}\ R/a^2R \to X$ deux sections telles que $s_1 = s_2 \mod a$. Alors $s_1 = s_2 \mod a^2\lambda^{-1}$.*

Démonstration. Posons $s = s_1 \mod a$. L'ensemble des relèvements de s en des sections modulo a^2 est un espace principal homogène sous $\mathrm{Hom}_X(\Omega^1_{X/R}, R/a)$ (où $R/a = a/a^2R$ est vu comme un $\mathscr{O}_X$-module au moyen de la section s). De même, l'ensemble des relèvements modulo $a^2\lambda^{-1}$ de s est un espace principal homogène sous $\mathrm{Hom}_X(\Omega^1_{X/R}, R/a\lambda^{-1})$. L'application $\mathrm{Hom}_X(\Omega^1_{X/R}, R/a) \to \mathrm{Hom}_X(\Omega^1_{X/R}, R/a\lambda^{-1})$ correspond à la restriction des sections de R/a^2 à $R/a^2\lambda^{-1}$, et elle est nulle car λ annule $\Omega^1_{X/R}$. Cela signifie que tous les relèvement à R/a^2 sont égaux modulo $R/a^2\lambda^{-1}$. □

Corollaire A.1. — *Soit R une A_0-algèbre α-adiquement complète et sans A_0-torsion. Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon n sur R. Soit $\lambda \in A_0$ tel que $\lambda^2 u = p$ avec u topologiquement nilpotent. Soit $m \leq n$. Supposons que $\lambda \mod p \in \mathrm{Ha}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}(\Lambda^d\omega_G)^{\otimes(1-p^m)}$. Alors, G possède un sous-groupe canonique fini localement libre H_m et les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *H_m relève* $\mathrm{Ker}\ F^m$ *modulo $\frac{p}{\lambda}$,*
2. *Pour toute R-algèbre R', α-adiquement complète et sans A_0-torsion,*
$$H_m(R') = \{s \in G[p^m](R'),\ s \mod p\lambda^{-1} \in \mathrm{Ker} F^m\},$$
3. *Soit $L_m = G[p^m]/H_m$. Alors ω_{L_m} est annulé par* $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$*, et on a des isomorphismes* $\det\ \omega_{L_m} \simeq \det\ \omega_G/\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$.

Remarque A.1. — La seconde propriété caractérise H_m.

Démonstration. Quitte à faire une localisation de Zariski, on peut supposer que le faisceau ω_G est trivial. Soit $G_1 = G|_{R/p}$. Soit $\ker V^m$ le conoyau de l'inclusion $\mathrm{Ker} F^m \to G_1[p^m]$. Le complexe de co-Lie de $\mathrm{Ker} V^m$ vaut :

$$[\omega_{G_1} \overset{\mathrm{HW}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}}{\longrightarrow} \omega_{G_1^{(p^m)}}].$$

Comme $\mathrm{Ha}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$ divise λ, la multiplication par λ est homotope à 0. On peut donc appliquer la proposition A.1. Ceci démontre l'existence de H_m. Soit L_m le conoyau du morphisme $H_m \to G[p^m]$. Comme L_m se réduit sur $\mathrm{Ker} V^m$ modulo $p\lambda^{-1}$, on obtient que ω_{L_m} est annulé par $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$ modulo $p\lambda^{-1}$. Il en résulte que $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}\omega_{L_m} \subset \mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}} u\omega_{L_m}$ et le lemme de Nakayama entraîne que ω_{L_m} est annulé par $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$ et donc aussi par λ.

On a une surjection $\det\ \omega_G \to \det\ \omega_{L_m}$. qui induit un isomorphisme

$$\det\ \omega_G/(\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}, p\lambda^{-1}) \to \det\ \omega_{L_m}.$$

Comme $p\lambda^{-1} \in \mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$ on obtient l'isomorphisme $\det\ \omega_{L_m} \simeq \det\ \omega_G/\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^m-1}{p-1}}$.

Démontrons la formule $H_m(R') = \{s \in G[p^m](R'),\ s \mod p\lambda^{-1} \in \mathrm{Ker} F^m\}$.

Il résulte du lemme A.2 que si $s \in L_m(R')$ et la section identité modulo $p\lambda^{-1}$, elle est la section identité modulo $p^2\lambda^{-3} = \frac{p}{\lambda}u$. En répétant l'argument, on en déduit que c'est la section identité modulo $\frac{p}{\lambda}u^r$ pour tout r et donc la section identité.

$\square$

Remarque A.2. — Si R est une $\mathbb{F}_p$-algèbre, la théorie est bien sûre triviale, G possède toujours un sous-groupe canonique d'ordre n : le noyau de F^n. On le retrouve en appliquant la proposition avec $\lambda = 0$ et $u = 0$.

Corollaire A.2. — *Soit R une A_0-algèbre α-adiquement complète et sans A_0-torsion. Soit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Soit G un groupe de Barsotti-Tate sur R, de dimension d et hauteur h. Soit $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Supposons que $p \in \mathrm{Hdg}(G)^{p^{m+1}}$.*

1. *G possède un sous-groupe canonique H_n d'échelon n pour tout $n \leq m$, et on a $H_n \subset H_{n'}$ si $n \leq n'$.*
2. *H_n est localement libre de rang p^{nd} et il relève le groupe* Ker F^n *modulo* $p\mathrm{Hdg}(G)^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$.
3. *Soit $G' = G/H_n$. Alors* $\mathrm{Hdg}(G') = \mathrm{Hdg}(G)^{p^n}$, *$G'$ possède un sous-groupe canonique H'_{m-n}, d'échelon $m-n$, et on a une suite exacte :*

$$0 \to H_n \to H_m \to H'_{m-n} \to 0.$$

4. *Le faisceau conormal $\omega_{G[p^n]/H_n}$ est annulé par* $\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^n-1}{p-1}}$ *et* $\det \omega_{G[p^n]/H_n} \simeq \det \omega_{G[p^n]}/\mathrm{Hdg}(G)^{\frac{p^n-1}{p-1}}$.
5. *Soi G^D le dual de G. Alors* $\mathrm{Hdg}(G) = \mathrm{Hdg}(G^D)$. *Pour tout $n \leq m$, l'accouplement $G[p^m] \times G[p^m]^D \to \mu_{p^n}$ induit une identification $H_n(G) \simeq H_n(G^D)^\perp$.*
6. *Supposons de plus que $\alpha \in$* $\mathrm{Hdg}(G)$. *Alors $G[p^n]/H_n$ est étale sur* Spec $R[1/\alpha]$, *localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{h-d}$.*

Remarque A.3. — Le caractère étale de $G[p^m]/H_m$ n'est pas trivial puisque p n'est pas forcément inversible dans $R[\frac{1}{\alpha}]$. Il suffit de penser à la situation où $A_0 = \mathbb{F}_p[[T]]$, $\alpha = T$.

Démonstration. Quitte à faire une localisation Zariski, on peut supposer que $\mathrm{Hdg}(G)$ est principal engendré par $\tilde{\mathrm{Ha}}$. On pose $\lambda = \tilde{\mathrm{Ha}}^{\frac{p^m-1}{p-1}}$, $u = p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-2\frac{p^m-1}{p-1}}$. On vérifie que u est topologiquement nilpotent car $p^{m+1} \rangle 2\frac{p^m-1}{p-1}$.

L'existence de H_n pour $n \leq m$, l'inclusion $H_n \subset H_m$ et la propriété de relèvement du noyau de Frobenius résultent du corollaire A.1.

Si $G' = G/H_n$, on a $G' = G^{(p^n)}$ modulo $p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$ et on a donc l'égalité des idéaux :

$$(\mathrm{Hdg}(G'), p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}) = (\mathrm{Hdg}(G)^{p^n}, p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-1}{p-1}})$$

Vérifions alors que $\mathrm{Hdg}(G')$ est engendrée par $\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^n}$. Soit $x \in \mathrm{Hdg}(G')$ et $u \in R$ tels que $x = \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^n} + up\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$. Alors $x = \tilde{\mathrm{Ha}}^{p^n}(1 + up\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^{n+1}-1}{p-1}})$. Or $p\tilde{\mathrm{Ha}}^{-\frac{p^{n+1}-1}{p-1}}$ est topologiquement nilpotent, donc $\tilde{\mathrm{Ha}}^{p^n} \in \mathrm{Hdg}(G')$ et c'est clairement un générateur. Il en résulte que $\mathrm{Hdg}(G')$ possède un sous-groupe canonique d'échelon $m-n$. On a une application évidente $H_m \to H'_{m-n}$ d'après la propriété 2 du corollaire A.1. En comparant les ordres de H_n, H_m et H'_{n-m}, on obtient la suite exacte annoncée. Soit G^D le dual de G. On a $\mathrm{Hdg}(G) = \mathrm{Hdg}(G^D)$ d'après [**13**]. Considérons le groupe $H_n(G)^\perp \subset G^D[p^n]$. Le point 2. du corollaire A.1 montre que $H_n(G)^\perp \subset H_n(G^D)$. Comme ces deux groupes ont même rang, ils sont égaux. Vérifions le dernier point. Posons $L_m = G[p^m]/H_m$. Comme ω_{L_m} est de α-torsion, il en résulte que L_m est étale sur Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$. La dernière propriété est vérifiée sur une partie ouverte et fermé de Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$. Soit x un idéal de Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$. Soit x' un idéal maximal de Spec R qui est une spécialisation de x. On a donc que $\alpha \in x$. Soit A un sous anneau de valuation de Frac$(R_{x'}/x)$ qui domine $R_{x'}/x$. Cela nous fournit une valuation v sur $R[\frac{1}{\alpha}]$. D'après [**18**], prop. 2.6 (appliquée à $I = R^{00}$) et thm. 3.1, il existe une spécialisation $v' \in \mathrm{Spa}(R[\frac{1}{\alpha}], \tilde{R})$ de v, où $\tilde{R}$ est la normalisations de R dans $R[\frac{1}{\alpha}]$. Le support de $v' \in \mathrm{Spec}R[\frac{1}{\alpha}]$ est une spécialisation de x. D'autre part,comme $R[\frac{1}{\alpha}]$ est une algèbre de Tate, v' admet une générisation de rang 1. On a donc un morphisme $R \to \mathcal{O}_K$ où K est un corps valué complet pour une valuation de rang 1 et $\mathcal{O}_K$ est son anneau d'entiers. Si K est un corps de caractéristique p, $L_m|_K = \mathrm{Ker}V^m$ et $L_m|_K$ est bien localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{h-d}$. Sinon, K est un corps local d'inégale caractéristique, la théorie classique nous dit que $L_m|_K$ est localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{h-d}$. Il en résulte que L_m est localement libre comme $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$-module en tout point fermé de Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$ et donc sur Spec $R[\frac{1}{\alpha}]$ tout entier. □

Appendice B
Théorie spectrale

Nous étendons la théorie spectrale de Coleman afin de pouvoir l'appliquer au dessus de l'espace des poids $\mathcal{W}$. Le point essentiel est l'existence de factorisations locales de la série de Fredholm au voisinage du bord, qui n'avait pas été étudié auparavant.

B.1. Série de Fredholm et factorisation. — Soit (A, A^+) une $\mathbb{Z}_p$-algèbre de Tate. Notons $A_0 \subset A^+$ un anneau de définition et fixons $\alpha \in A_0$ tel que $A = A_0[1/\alpha]$ et (α) est un idéal de définition dans A_0. Nous supposons de plus que A_0 est noethérien, et donc (A, A^+) est faisceautique.

Définition B.1. — *Une série formelle $F = \sum_{n\geq 0} a_n T^n \in A[[T]]$ est appelée série de Fredholm si :*

1. $a_0 = 1$,
2. *Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $a_n\alpha^{rn} \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Soit $\mathbb{A}^1$ la droite affine sur $S = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ qui est la réunion croissante des boules affinoides $\{\mathbb{B}_n = \mathrm{Spa}(A < \alpha^n T >, A^+ < \alpha^n T >)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Soit F un série de Fredholm. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir le fermé $V(F)_n \subset \mathbb{B}_n$ où $V(F)_n = \mathrm{Spa}(C_n, C_n^+)$ avec $C_n = A < \alpha^n T > /(F)$ et C_n^+ est la normalisation de l'image de $A^+ < \alpha^n T >$ dans C_n. La variété spectrale $V(F)$ est le fermé de $\mathbb{A}^1$ qui vaut la réunion des $V(F)_n$. On a un morphisme $w : V(F) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$.

Rappelons quelques définitions ([**19**], sect. 1.4.2, 1.4.4). Un morphisme $(C, C^+) \to (B, B^+)$ d'algèbres affinoides est fini si B est fini sur C et B^+ est la clôture intégrale de C^+ dans B. Il est fini et plat si B est plat sur C. Un morphisme $f : X \to Y$ d'espaces adiques est fini et plat si tout point $y \in Y$ possède un voisinage affine $U = \mathrm{Spa}(C, C^+)$ tel que $f^{-1}(U) = \mathrm{Spa}(B, B^+)$ est affine et $(C, C^+) \to (B, B^+)$ est un morphisme fini et plat.

Lemme B.1. — *Supposons que A est un corps. Alors $V(F)$ est une limite inductive d'espaces adiques finis et plats sur* $\mathrm{Spa}(A, A^+)$*.*

Démonstration. Soit A^0 l'anneau des éléments à puissance bornée dans A et A^{00} l'idéal des éléments topologiquement nilpotents. On a $A^{00} \subset A^+ \subset A^0$. Soit $|.|$ la norme de rang 1 sur A correspondant à A^0 et v la valuation associée. On normalise v par $v(\alpha) = 1$. Soit

$\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ les pentes du polygone de Newton de F rangées par ordre strictement croissant. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda = \frac{l}{m}$ un rationnel tel que $s_n < \lambda < s_{n+1}$. Soit $\mathbb{B}_\lambda \subset \mathbb{A}^1$ l'ouvert rationnel d'équation $|\alpha^l T^m| \leq 1$. Nous allons montrer que $\mathbb{B}_\lambda \cap V(F) \to S$ est fini. Quitte à faire une extension finie de A, ce qui est loisible d'après [**19**], lem. 1.4.9, on peut supposer qu'il existe $\beta \in A$ tel que $v(\beta) = \lambda$. On a alors $\mathbb{B}_\lambda = \mathrm{Spa}(A < \beta T >, A^+ < \beta T >)$. Soit la factorisation de F en $F = PU$, où P est un polynôme et U est la série de Fredholm n'ayant pas de racines de pente inférieures à s_n. Dans une clôture algébrique $\bar{A}$ de A, on a $P(T) = \prod(1 - a_i T)$ avec $v(a_i) < \lambda$, donc $P(T) = \prod_i \beta^{-1} a_i \prod_i (a_i^{-1}\beta - \beta T)$. Posons $Q(T) = \prod(a_i^{-1}\beta - \beta T) \in A^{00} < \beta T >$. On a alors $A < \beta T > /F(T) = A < \beta T > /Q(T)$ et $\left(A < \beta T > /F(T)\right)^+ = A^+ < T > /Q(T)$ et ces algèbres sont finies sur A et A^+ respectivement.

□

Théorème B.1. — *Soit $x \in V(F)$ et $w(x) \in \mathrm{Spa}(A, A^+)$. Alors il existe un voisinage U de x dans $V(F)$ et un voisinage V de $w(x)$ dans $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ tel que le morphisme $w|_U : U \to V$ est fini et plat.*

Démonstration. Soit $y \in V(F)$ et $x = w(y) \in S$. On sait qu'il existe un ouvert W de $V(F) \times_S \mathrm{Spa}(k(x), k(x)^+)$ tel que $y \in W$ et $W \to \mathrm{Spa}(k(x), k(x)^+)$ est fini. Il existe alors un ouvert W' de $V(F)$ dont la trace sur $V(F) \times_S \mathrm{Spa}(k(x), k(x)^+)$ est W et tel que $W' \to S$ est de type fini. On peut alors appliquer [**19**], lemme 1.4.7, pour déduire qu'il existe un voisinage U de x dans W et $V \subset w(U)$ de y dans S tel que le morphisme induit $U \to V$ soit fini. Par ailleurs, pour tout n, on voit comme dans [**5**], Part I, lem. 4.1, que le morphisme $V(F)_n \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ est plat. D'autre part $U \hookrightarrow V(F)_n|_V$ pour n suffisamment grand et comme U est propre sur V, U est fermée dans $V(F)_n$, donc c'est une union de composantes connexes de $V(F)_n$. Par conséquent, le morphisme $U \to V$ est plat. □

Corollaire B.1. — *Soit $x \in V(F)$, U et V comme dans le théorème. On suppose (il suffit de rapetisser V), que $U = \mathrm{Spa}(C, C^+)$, $V = \mathrm{Spa}(B, B^+)$, et U est de rang constant d sur V. Alors la série de Fredholm F possède une factorisation dans B : $F = QS$ où $Q = 1 + b_1 T + \cdots + b_d T^d \in B[T]$, S est une série de Fredholm à coefficient dans B, et $(Q, S) = 1$. De plus $C = B[T]/Q(T)$.*

Démonstration. Comme U est un fermé de $V_n(F)$ pour n assez grand, on possède une surjection $B < \alpha^n T > \to C$. Soit $Q' \in B[T]$ le polynôme caractéristique de l'image T dans C. Le morphisme $B < \alpha^n T > \to C$ se factorise en un morphisme surjectif $B[T]/Q'(T) \to C$. En comparant les rangs, on déduit que ce morphisme est un isomorphisme. Posons alors $Q(T) = Q'(0)^{-1} Q'(T)$. On a $F = QS$. □

B.2. Construction de variétés de Hecke. — Dans cette section nous allons rappeler brièvement comment on construit des variétés de Hecke (voir [**8**], sect. A et [**5**], part I, const. 5.7). On va maintenant supposer que A est équippée d'une norme $||.|| : A \to \mathrm{R}_{\geq 0}$ multiplicative, telle que $A^+ = A^0 = \{a \in A, ||A|| \leq 0\}$. On suppose également que A est un anneau de Jacobson. Ces hypothèses sont vérifiées dans les cas qui nous intéresse.

Soit M un A-module de Banach projectif, H une algèbre commutative d'endomorphismes continus A-linéaires de A et $U \in H$ un opérateur compact.

D'après [**8**], sect. A.2, on peut définir F la série de Fredholme de U agissant sur M. Soit $Z = V(F) \subset \mathbb{A}^1_{\mathrm{Spa}(A,A^+)}$ la variété spectrale. D'après le corollaire B.1, pour tout point $x \in Z$, on possède un voisinage U fini et plat sur son image $w(U)$ dans l'espace des poids. Au dessus de $w(U)$ on a une factorisation $F = QS$ où Q est un polynôme et S une série de Fredholm première à Q. D'après [**8**], sect. A.4, on a une décomposition $M = M(Q) \oplus N'$ où

$M(Q)$ est l'espace caractéristique associé à Q. On définit un faisceau cohérent $\mathscr{M}$ sur Z par $\mathscr{M}(U) = M(Q)$. On note $\mathscr{O}_E$ la $\mathscr{O}_Z$-algèbre cohérente engendré par H dans $\mathrm{End}_Z(\mathscr{M})$. On note $E \to Z$ l'espace adique associé à $\mathscr{O}_E$. C'est la variété de Hecke associée à (M, H, U).

Références

[1] F. Andreatta, A Iovita et G. Stevens, *Geometric overconvergent modular forms*, prépublication.

[2] J. Bergdall et R. Pollack, prépublication.

[3] L.Berger et P. Colmez, *familles de représentations de deRham et monodromie p-adique.*

[4] P.Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication 96-03, 1996, disponible sur `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`.

[5] K. Buzzard, *Eigenvarieties*, Proceedings of the LMS Durham conference on *L-functions and arithmetic geometry*, 2004.

[6] K. Buzzard et L. Kilford, *the 2-adic eigencurve at the boundary of the weight space*, Compositio Math. 141 (2005), 605-619.

[7] K. Buzzard and R. Taylor, *Companion forms and weight 1 forms*, Annals of Math. **149**, 1999.

[8] R. Coleman, *p-adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math., **127**, 417-479, 1997.

[9] R. Coleman, *Spectral halo.*

[10] R. Coleman and B. Mazur, *The eigencurve*, Galois representations in *arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, vol. **254** of London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1-113. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[11] B. Conrad, *Irreducible components of rigid spaces.*

[12] L.Fargues, *La Filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*,à paraître à Journal für die Reine und angewandte Mathematik.

[13] L.Fargues, *La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles*, avec la collaboration de Yichao Tian, Prépublication.

[14] U. Hartl et R. Pink, *Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc*, Compositio Math. 140 (2004) 689–716.

[15] H. Hida, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. ENS, **19**, 231-273, 1986.

[16] H. Hida, *p-adic automorphic forms on reductive groups*, Astérisque **298**, 2005, p. 147-254.

[17] R. Huber, *A generalization of formal scheme and rigid analytic varieties*, Math. Z., 217, 513-551 (1994).

[18] R.Huber, *Continuous valuations*, Math. Z. 212, 455-477 (1993).

[19] R. Huber, *étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Math., E30 ; Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

[20] N. Katz, *P-adic properties of modular schemes and modular forms*, Modular functions of one variable III, SLN, **350**, p. 69 à 190.

[21] R. Liu, D. Wan et L. Xiao, prépublication.

[22] W. Lütkebohmert, *Der Satz von Remmert-Stein in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Math Z, 139, 69 - 84 (1974).

[23] W. Messing.

[24] F.Oort et J. Tate, *Group schemes of prime order*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t.3, 1970, p. 1 à 21.

[25] V. Pilloni, *Formes modulaires suconvergentes.*

[26] P. Scholze, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties.*

[27] J-P. Serre, *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, **12** (1962), p. 69-85.

[28] J. Tate, *p-divisible groups.*

[29] P. Valabrega, *A few theorem on completion of excellent ring*, Nagoya Math. Journal, Vol. 61(1976), 127-133.

Fabrizio, Adrian and Vincent