

---

## Table des matières

Remerciements .....	iii
Introduction .....	vii
<b>1 Quelques préliminaires à propos de groupes et d'algèbres de Lie classiques .....</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités et premiers exemples .....	2
1.2 À propos du dictionnaire groupes/algèbres de Lie .....	4
1.3 Notions sommaires sur les algèbres de Lie semi-simples classiques .....	7
1.4 Les espaces homogènes, quelques exemples .....	9
1.5 L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie .....	14
1.5.1 Préliminaires sur les algèbres filtrées et graduées .....	14
1.5.2 Construction de l'algèbre enveloppante .....	14
1.6 Notions très générales sur les représentations .....	17
<b>2 Notions d'algèbre homologique, la cohomologie des algèbres et des groupes de Lie .....</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction à l'algèbre homologique .....	23
2.1.1 Introduction et premiers exemples .....	23
2.2 Quelques définitions et techniques de base .....	25
2.3 La cohomologie des algèbres de Lie .....	29
2.3.1 Dérivations des algèbres de Lie .....	29
2.3.2 Extensions centrales d'algèbres de Lie .....	31
2.3.3 Cohomologie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à coefficients dans un $\mathfrak{g}$ -module $M$ .....	34
2.3.4 L'extension centrale universelle .....	37
2.3.5 Relation entre la cohomologie d'une algèbre de Lie et la cohomologie de De Rham du groupe correspondant .....	39
2.4 Les extensions centrales des groupes .....	48
2.4.1 Introduction et définitions .....	48

2.5	La cohomologie des groupes . . . . .	51
2.6	Les extensions de groupes de Lie . . . . .	54
2.6.1	Extensions centrales de groupes de Lie et extensions centrales d'algèbres de Lie . . . . .	59
2.6.2	Extensions centrales et représentations projectives . . . .	61
2.6.3	Relation entre la cohomologie différentiable et la cohomologie des algèbres de Lie : le théorème de van Est . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Éléments de géométrie symplectique . . . . .</b>	<b>71</b>
3.1	Notions de base . . . . .	71
3.1.1	Algèbre symplectique : la géométrie d'une 2-forme . . . .	71
3.1.2	Variétés symplectiques et théorème de Darboux. Variétés présymplectiques . . . . .	84
3.1.3	Variétés complexes, presque complexes. Intégrabilité : variétés kählériennes . . . . .	91
3.1.4	Les exemples classiques de variétés symplectiques : $T^*(V)$ , $\mathbb{T}^n$ , $P^n(\mathbb{C})$ , et les courbes algébriques . . . . .	93
3.1.5	Structures de Poisson, variété de Poisson, algèbres de Poisson. Les relations avec la mécanique analytique . . .	99
3.2	Actions symplectiques de groupes et méthode des orbites . . .	108
3.2.1	Les orbites coadjointes et leurs structures symplectiques	108
3.2.2	Structures kählériennes sur les orbites . . . . .	112
3.2.3	Actions symplectiques : application moment et cocycle de Souriau . . . . .	116
3.2.4	Réduction symplectique . . . . .	126
3.3	Un petit voyage dans la quantification . . . . .	131
3.3.1	Introduction et aspects physiques . . . . .	131
3.3.2	La problématique de la quantification. Règles de Dirac et de Heisenberg . . . . .	133
3.3.3	La quantification canonique et son échec : le théorème de van Hove . . . . .	135
3.3.4	Quantification asymptotique et quantification par déformations . . . . .	139
3.3.5	La première étape de la quantification géométrique : la préquantification . . . . .	142
3.3.6	Quantification géométrique, suite et fin : la notion de polarisation . . . . .	148
3.3.7	Un exemple de seconde quantification . . . . .	153
3.3.8	Un exemple d'application : le théorème de Borel et Weil	154
<b>4</b>	<b>L'algèbre et le groupe de Virasoro : leurs premières propriétés . . .</b>	<b>157</b>
4.1	L'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents au cercle . . .	157
4.1.1	Structures de Fréchet sur $\text{Vect}(\mathbb{C}^*)$ et $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(S^1)$ . . . . .	160
4.1.2	La simplicité de $L_{\mathbb{K}}$ . . . . .	161

4.1.3	Filtration de $L_{\mathbb{C}}$ , sous-algèbres nilpotentes et plongements de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ dans $L_{\mathbb{C}}$ . . . . .	162
4.1.4	L'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels . . . . .	164
4.1.5	La conjecture de V. Kac et le théorème de O. Mathieu . . . . .	165
4.2	Représentations naturelles de $\text{Vect}(S^1)$ et de l'algèbre de Virasoro . . . . .	166
4.2.1	Les modules $\mathcal{F}_{\lambda, \mu}$ . . . . .	166
4.2.2	Le dual de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(S^1)$ . . . . .	169
4.2.3	Cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels à une indéterminée . . . . .	170
4.2.4	La cohomologie de $\text{Vect}(S^1)$ en degrés 1 et 2 . . . . .	172
4.2.5	La construction de l'algèbre de Virasoro . . . . .	174
4.3	Cohomologie de $\text{Vect}(S^1)$ à coefficients dans ses représentations naturelles . . . . .	175
4.3.1	La cohomologie de $\text{Vect}(S^1)$ à coefficients dans les modules de densité. Réduction au cas formel . . . . .	175
4.3.2	Étude de $H^*(L_0, \mathcal{F}_{\lambda})$ . . . . .	182
4.3.3	Cohomologie de $\text{Vect}(S^1)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ . . . . .	185
4.4	Le groupe des difféomorphismes du cercle . . . . .	190
4.4.1	Le groupe de Lie-Fréchet $\text{Diff}^+(S^1)$ . Les modules de densité . . . . .	190
4.4.2	Algèbre de Lie et application exponentielle . . . . .	201
4.4.3	Nombre de rotation et dynamique . . . . .	206
4.4.4	Le problème de la complexification de $\text{Diff}^+(S^1)$ . . . . .	215
4.5	Le groupe de Virasoro, sa cohomologie et ses applications aux feuilletages . . . . .	218
4.5.1	Cohomologie de $\text{Diff}(S^1)$ et groupe de Virasoro . . . . .	218
4.5.2	Le groupe de Virasoro et les feuilletages de codimension 1 . . . . .	232
<b>5</b>	<b>Un bestiaire symplectique en dimension infinie ou les aventures de la méthode des orbites</b> . . . . .	<b>241</b>
5.1	Quelques rappels d'analyse fonctionnelle . . . . .	242
5.1.1	Opérateurs bornés dans un espace de Hilbert . . . . .	242
5.1.2	Idéaux de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et algèbres d'opérateurs . . . . .	243
5.1.3	Calcul différentiel banachique ; le théorème de Kuiper et ses conséquences . . . . .	246
5.1.4	Opérateurs non bornés . . . . .	248
5.2	Les groupes de Lie-Banach et leurs espaces homogènes . . . . .	250
5.2.1	Quelques sorites sur les variétés banachiques . . . . .	250
5.2.2	Espaces de Hilbert polarisés et groupes linéaires restreints . . . . .	252
5.2.3	Les extensions centrales de $\text{GL}_{\text{res}}(\mathcal{H})$ et de ses sous-groupes . . . . .	257
5.2.4	Les espaces homogènes des groupes linéaires restreints . . . . .	261

5.3	Les espaces de lacets .....	267
5.3.1	Un peu de géométrie riemannienne .....	269
5.3.2	L'espace des lacets comme variété présymplectique ...	275
5.3.3	Généralisation : d'autres structures symplectiques sur les espaces de lacets .....	281
5.4	Le groupe des lacets d'un groupe de Lie compact .....	283
5.4.1	La structure présymplectique sur $L(G)$ .....	283
5.4.2	Structure complexe sur $\Omega(G)$ et décomposition de Birkhoff .....	285
5.4.3	Quelques propriétés hamiltoniennes de $\Omega(G)$ .....	289
5.4.4	Quelques aspects géométriques de l'espace $\Omega(G)$ .....	290
5.5	Le groupe de Kac-Moody .....	293
5.5.1	Préliminaires .....	293
5.5.2	La construction du groupe de Kac-Moody .....	295
5.5.3	La situation cohomologique .....	301
5.5.4	Autres constructions possibles de $\widehat{L(G)}$ .....	304
5.5.5	La relation avec le groupe de Virasoro .....	306
5.5.6	Quelques mots sur les orbites coadjointes et les représentations .....	307
5.6	Autres exemples .....	310
5.6.1	L'espace des nœuds .....	310
5.6.2	L'espace des champs de jauges .....	319
<b>6</b>	<b>Géométrie des orbites coadjointes de l'algèbre de Virasoro .....</b>	<b>323</b>
6.1	Généralités – Classification infinitésimale .....	324
6.1.1	Dualité .....	324
6.1.2	Moments à support fini et moments réguliers .....	325
6.1.3	La représentation coadjointe .....	325
6.1.4	Généricité dans le dual : moments de Morse .....	327
6.1.5	La structure symplectique des orbites coadjointes .....	327
6.1.6	La représentation coadjointe de Vir .....	329
6.1.7	La classification infinitésimale des orbites coadjointes .	334
6.1.8	Formes et crochet de KKS sur $\mathfrak{vir}^*$ .....	338
6.2	Les orbites a charge centrale nulle .....	339
6.2.1	Notations .....	339
6.2.2	Premières propriétés .....	340
6.2.3	La mesure associée à un moment .....	342
6.2.4	Le nombre de rotation comme invariant de l'orbite ...	343
6.2.5	Le cas d'un moment sans zéros .....	346
6.2.6	Le cas où $Z$ est non vide et d'intérieur vide .....	349
6.2.7	La classification des moments de Morse .....	352
6.2.8	Les structures symplectiques sur les orbites .....	354
6.3	Les orbites à charge centrale non nulle .....	356
6.3.1	Les structures projectives sur le cercle .....	356
6.3.2	Structures projectives et opérateurs de Hill .....	368

6.3.3	L'espace des orbites coadjointes du groupe de Virasoro	380
6.3.4	Les nombres de translation attachés à une orbite . . . . .	386
6.3.5	Groupes d'automorphismes et classification des orbites	391
6.3.6	Digression géométrique sur la dérivée de Schwarz . . . .	401
6.4	Les systèmes dynamiques sur les orbites du groupe de Virasoro . . . . .	402
6.4.1	Équation(s) d'Euler sur $\text{Diff}(S^1)$ et opérateurs de Hill .	402
6.4.2	L'équation de Korteweg-de Vries et la réduction de Drinfel'd-Sokolov . . . . .	408
6.4.3	Transformation de Miura et structures affines sur le cercle . . . . .	410
6.5	Les orbites coadjointes $\text{Diff}(S^1)/S^1$ et $\text{Diff}(S^1)/\text{PSL}(2; \mathbb{R})$ . . . .	422
6.5.1	Réalisation symplectique comme orbite coadjointe . . . .	423
6.5.2	Réalisations algébriques de l'espace homogène $\mathcal{S}$ . . . . .	425
6.5.3	L'espace des mesures de probabilité . . . . .	426
6.5.4	L'espace des courbes de Jordan . . . . .	429
6.5.5	Le semi-groupe de Neretin-Segal . . . . .	431
6.5.6	L'espace des fonctions univalentes sur le disque . . . . .	435
6.5.7	L'espace des structures complexes sur $L(\mathbb{R})$ et les espaces de lacets . . . . .	441
6.5.8	La courbure de Ricci de la variété kählérienne $\text{Diff}(S^1)/S^1$ . . . . .	444
6.6	L'espace de Teichmüller universel . . . . .	449
6.6.1	Homéomorphismes quasi symétriques, transformations quasi conformes et différentielles de Beltrami . . . . .	449
6.6.2	L'espace universel de Bers $T(1)$ . . . . .	454
6.6.3	Relations avec $T(\Sigma)$ et $T(\Gamma)$ . . . . .	458
6.6.4	La métrique de Weil-Petersson . . . . .	461
6.6.5	Les travaux de Nag et Verjovsky sur $T(1)$ . . . . .	463
6.6.6	Calcul différentiel quantique sur le cercle . . . . .	470
<b>7</b>	<b>Les représentations de l'algèbre et du groupe de Virasoro</b> . . . . .	<b>479</b>
7.1	Représentations dans l'espace de Fock bosonique . . . . .	481
7.1.1	L'algèbre des oscillateurs . . . . .	481
7.1.2	Représentation bosonique de l'algèbre de Virasoro . . . .	485
7.2	Les représentations de l'algèbre de Virasoro à l'aide des oscillateurs fermioniques . . . . .	490
7.3	L'espace des formes semi-infinies . . . . .	495
7.4	Les algèbres d'opérateurs de vertex . . . . .	506
7.4.1	Introduction . . . . .	506
7.4.2	Les distributions formelles . . . . .	506
7.4.3	Produit des distributions, produit de Wick, localité . . . .	510
7.4.4	Champs bosoniques et fermioniques . . . . .	513

7.4.5	Les algèbres de Kac-Moody et de Virasoro dans le formalisme des algèbres d'opérateurs de vertex . . . . .	519
7.4.6	Le théorème de Wick . . . . .	523
7.4.7	Représentations bosoniques et fermioniques de l'algèbre de Virasoro . . . . .	526
7.4.8	Une nouvelle forme du théorème de Wick et les représentations de Sugawara . . . . .	531
7.4.9	En guise d'épilogue . . . . .	538
7.5	Les modules de plus haut poids et les modules de Verma . . . . .	541
7.5.1	La construction des modules de Verma . . . . .	541
7.5.2	Forme de Shapovalov et unitarité . . . . .	545
7.6	Construction des représentations de $\text{Diff}(S^1)$ par les espaces de Fock . . . . .	550
7.6.1	La version analytique des espaces de Fock bosoniques et fermioniques, l'isomorphisme bosons-fermions . . . . .	550
7.6.2	Algèbres de relations canoniques et seconde quantification . . . . .	554
7.6.3	À propos de seconde quantification . . . . .	558
7.6.4	Groupe spin et métaplectique : représentation de Weil et représentation spinorielle . . . . .	560
7.6.5	Plongement du groupe des difféomorphismes du cercle dans $\text{Sp}_{\text{res}}(\mathcal{H})$ . . . . .	563
7.6.6	Autres constructions de représentations de $\text{Diff}(S^1)$ . . . . .	567
7.7	Quantification géométrique de $\text{Diff}(S^1)/S^1$ . . . . .	568
7.7.1	Plongements de $\text{Diff}(S^1)/S^1$ dans des variétés banachiques . . . . .	569
7.7.2	Le fibré de Fock sur $\text{Diff}(S^1)/S^1$ . . . . .	570
7.7.3	Le fibré quantique sur $\text{Diff}(S^1)/S^1$ . . . . .	572
7.7.4	La quantification des espaces de lacets sur un groupe de Lie. Généralisation . . . . .	573
7.7.5	Remarques finales . . . . .	575
<b>8</b>	<b>Généralisations de l'algèbre et du groupe de Virasoro dans le domaine complexe . . . . .</b>	<b>579</b>
8.1	La catégorie <i>Shtan</i> . . . . .	580
8.1.1	Interlude sur les catégories . . . . .	580
8.1.2	La construction de la catégorie <i>Shtan</i> et la théorie des champs conformes . . . . .	584
8.1.3	Les théories de champs topologiques (TCT) . . . . .	588
8.2	Les algèbres de Krichever-Novikov . . . . .	590
8.2.1	Notions sommaires sur les surfaces de Riemann . . . . .	591
8.2.2	La construction des algèbres de Krichever-Novikov . . . . .	597
8.2.3	Extensions centrales des algèbres de Krichever-Novikov . . . . .	601
8.2.4	Relations avec l'algèbre de Virasoro . . . . .	605
8.2.5	Les représentations des algèbres de Krichever-Novikov . . . . .	607

8.2.6	Les algèbres de Krichever-Novikov à points multiples .	608
8.2.7	Relations avec les déformations infinitésimales de la surface et les espaces de modules . . . . .	609
8.2.8	Les opérateurs différentiels d'ordre $\leq 1$ sur une surface de Riemann. . . . .	611
8.3	Quelques tentatives de généralisation en dimension supérieure	613
<b>9</b>	<b>Les superalgèbres de Lie superconformes . . . . .</b>	<b>617</b>
9.1	Éléments de superalgèbre . . . . .	618
9.1.1	La superalgèbre $\mathfrak{gl}(E)$ et ses sous-algèbres . . . . .	619
9.1.2	Les dérivations d'une superalgèbre supercommutative et les superalgèbres de champs de vecteurs. . . . .	620
9.2	Quelques notions élémentaires de supergéométrie . . . . .	624
9.3	Les superalgèbres de Lie superconformes et leur classification	631
9.4	Les charges centrales des superalgèbres de Lie superconformes	636
9.5	L'approche par les algèbres d'opérateurs de vertex . . . . .	639
9.6	Les supergroupes correspondant aux superalgèbres superconformes et leurs cocycles . . . . .	643
9.7	La quantification géométrique pour les supercordes . . . . .	646
<b>10</b>	<b>La géométrie des algèbres de Gel'fand-Dikiï et une introduction aux algèbres-<math>\mathcal{W}</math> . . . . .</b>	<b>651</b>
10.1	Les algèbres d'opérateurs différentiels et pseudo-différentiels sur le cercle . . . . .	653
10.2	Les matrices $R$ et les groupes de Lie-Poisson . . . . .	669
10.3	Les deux crochets de Gel'fand et Dikiï . . . . .	677
10.4	Les algèbres de Gel'fand-Dikiï et le groupe de Volterra ; applications aux systèmes intégrables . . . . .	687
10.5	La réduction de Drinfel'd-Sokolov et la transformée de Miura	696
10.6	Les feuilles symplectiques des algèbres de Gel'fand-Dikiï et leur relation avec la géométrie projective . . . . .	704
10.7	Les algèbres- $\mathcal{W}$ quantiques . . . . .	714
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>725</b>
	Articles . . . . .	725
	Livres . . . . .	746
<b>A</b>	<b>Notice historique . . . . .</b>	<b>755</b>
<b>B</b>	<b>Versions combinatoires de <math>\text{Diff}(S^1)</math> par Vlad SERGIESCU . . . . .</b>	<b>767</b>
B.1	Introduction . . . . .	767
B.2	Trois versions combinatoires de $\text{Diff}(S^1)$ . . . . .	768
B.3	Les groupes de Thompson . . . . .	769
B.4	Cohomologie des groupes continus . . . . .	771
B.5	Cohomologie des groupes de Thompson . . . . .	773

B.6	T est-il un réseau de $\text{Diff}(S^1)$ ? .....	774
B.7	Le groupe T, le groupe modulaire et l'espace de Teichmüller .	776
B.8	Quelques compléments .....	780
B.8.1	.....	780
B.8.2	.....	780
B.8.3	.....	781
B.8.4	.....	781
B.8.5	.....	781
B.8.6	.....	781
	Bibliographie .....	782
<b>Index</b>	.....	<b>785</b>